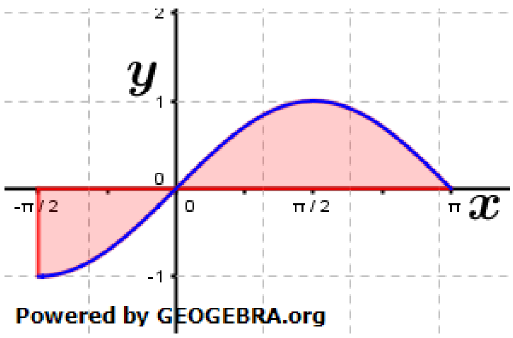
Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A1

1.1 Das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin(x)\,dx$ ist größer als Null, da die Fläche die der Graph der sin-Funktion oberhalb der x-Achse größer ist als die Fläche unterhalb der x-Achse.



1.2 Aussagen über das Schaubild von f sind:

Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H\left(-2\middle|\frac{19}{3}\right)$

(wegen $f(-2) = \frac{19}{3} \wedge f'(-2) = 0 \wedge f''(-2) = -3$)

Das Schaubild besitzt den Tiefpunkt $T\left(1\middle|\frac{11}{6}\right)$

(wegen $f(1) = \frac{11}{6} \wedge f'(1) = 0 \wedge f''(1) = 3$)

1.3 $f(x) = cos(2x)\,;\ x \in \mathbb{R}$

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Die Periode von f ist π.

$cos(2x) = -1$

$cos(\pi) = -1 \implies 2x = \pi \implies x_0 = \frac{\pi}{2}$

(Hinweis: wegen des Aufgabentextes „Bestimmen Sie *eine* Lösung" sind weitere Angaben nicht erforderlich.)

1.4

	Schaubild von f	Schaubild von f'	Schaubild von f''
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

Lösung A2

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}sin(2x) - 1 \qquad f(0) = -1$

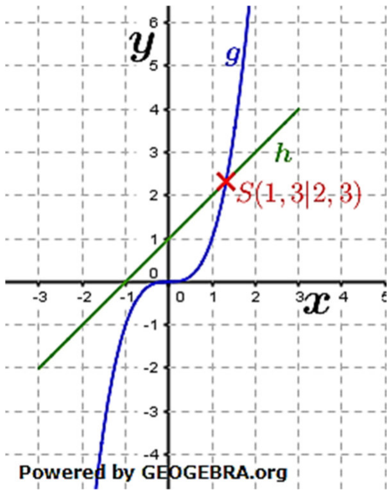
$f'(x) = cos(2x) \qquad f'(0) = 1$

$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = x - 1$

Die Gleichung der Tangente in $S_y(0|-1)$ ist $t(x) = x - 1$.

1.2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Nullstelle eines Graphen g mit $g(x) = x^3 - x - 1$ bestimmt werden. Mit der Eingabe dieser Funktion in den Funktionsspeicher des WTR kann dann über die Tabelle nach der/den Nullstellen gesucht werden.
Alternativ kann man die Schnittpunkte zweier Graphen der Funktionen g mit $g(x) = x^3$ und h mit $h(x) = x + 1$ bestimmen. Aus der seitlichen Grafik ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h., die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.



1.3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text:

- $p(0) = 0$ — K verläuft durch den Ursprung
- $p''(-2) = 0$ — K hat bei $x = -2$ eine Wendestelle
- $p(-2) = 4$ — K verläuft durch den Punkt $P(-2|4)$

Die vierte Bedingung $p(4) = 0$ ist falsch. Im Text ist $Q(4|0)$ Punkt der Wendetangente und nicht Punkt der Polynomfunktion.

1.4 Der kleinste Integralwert ist $\int_0^3 g(x)\,dx$. Die positive Fläche im Intervall $[0;1]$ ist kleiner als die negative Fläche im Intervall $[1;3]$, damit gilt $\int_0^3 g(x)\,dx < 0$.

Der mittlere Integralwert ist $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(1|0)$, d.h., das Integral $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = 0$, sodass der Wert des Integrals $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$ gleich dem Wert des Integrals $\int_{3}^{3,5} g(x)\,dx$ entspricht. $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx > 0$.

Den größten Wert besitzt $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$, da der Graph der Funktion im Intervall $[-1;1]$ausschließlich oberhalb der x-Achse verläuft. Somit ist $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx > \int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Insgesamt gilt:
(A)<(C)<(B)

Abituraufgaben Analysis BG *(ohne Hilfsmittel)* *Musteraufgaben*

Lösung A3

1.1 a) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = 0$ negativ Steigung.

b) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -2$ den Funktionswert $0{,}5$.

c) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -3$ einen Tiefpunkt.

d) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild ist an der Stelle $x = 3$ rechtsgekrümmt, damit ist die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ.

1.2 Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$.

$f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

$x^4 + x^2 - 6 = 0$

$x_{1,2}^2 = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1^2 = 2; \quad x_2^2 = -3$

$x_1^2 = 2 \qquad | \quad \sqrt{\ }$

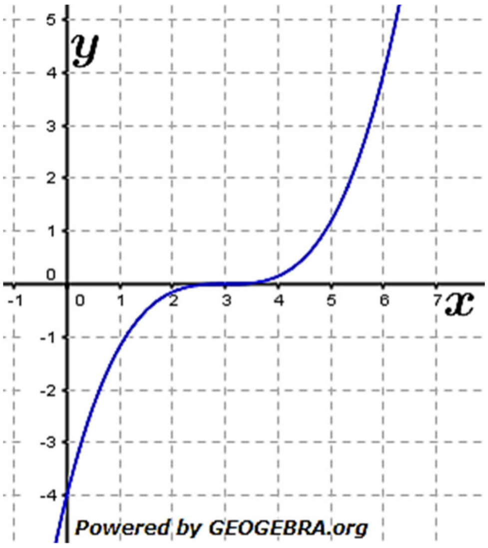
$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$x_2^2 = -3$ hat keine Lösung.

Das zugehörige Schaubild hat an den Stellen $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_1 = -\sqrt{2}$ waagrechte Tangenten.

1.3 $g(3) = 0$ ist eine Nullstelle bei $x = 3$. Da $\int_0^6 g(x)\ dx = 0$ sein soll, muss z. B. die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [0; 3]$ unterhalb der x-Achse mit der x-Achse einschließt, genauso groß sein wie die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [3; 6]$ oberhalb der x-Achse mit der x-Achse einschließt. Dies kann beispielsweise über das folgende Polynom dritten Grades dargestellt werden:

$g(x) = \frac{4}{27}(x - 3)^3$



1.4 Die Kosinusfunktion ist symmetrisch zur y-Achse. Somit muss S ein Hoch- und T ein Tiefpunkt sein. Hieraus errechnet sich die Amplitude a:

$a = \frac{y_{HP} - Y_{TP}}{2} = \frac{3-0}{2} = 1{,}5$

Verschiebung d in y-Richtung:

$d = \frac{y_{HP} + Y_{TP}}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$

Periode p:

$p = 2 \cdot (x_{TP} - x_{HP}) = 2 \cdot (3 - 0) = 6$

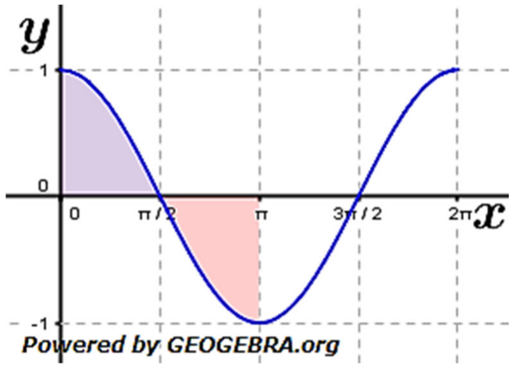
$b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Ein möglicher Funktionsterm lautet:

$f(x) = 1{,}5\,cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1{,}5$

Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) *Musteraufgaben*

Lösung A4



1.1 $\int_0^{\pi} cos(x)\ dx = 0$.
Wie aus der Grafik ersichtlich, ist die Fläche oberhalb der x-Achse im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gleich groß wie die Fläche unterhalb der x-Achse im Intervall $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

1.2 Nachweis Sattelpunkt mithilfe $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$:
$f'(x) = cos(x) + 1$
$f''(x) = -sin(x)$
$f'''(x) = -cos(x)$
$f'(\pi) = cos(\pi) + 1 = -1 + 1 = 0$
$f''(\pi) = -sin(\pi) = 0$
$f'''(\pi) = -cos(\pi) \neq 0$
Alle Bedingungen sind erfüllt, das Schaubild von f hat bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt.

1.3 $A = \int_0^4 3 \cdot e^{-x} dx = [-3 \cdot e^{-x}]_0^4 = -3e^{-4} - (-3e^0) = 3 - \frac{3}{e^4}$

1.4 a) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild hat im Bereich $0 < x < 2$ einen Hochpunkt, somit hat die erste Ableitung dort eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
b) Die Aussage ist richtig, die Fläche unter dem Schaubild im Intervall $0 \leq x \leq 2$ ist größer als 3 und kleiner als 6 Flächeneinheiten.
c) Die Aussage ist richtig, das Schaubild hat im Intervall $-2 < x < 1$ einen Wendepunkt, in dem sich die Krümmung von linksdrehend auf rechtsdrehend ändert.

1.5 Produktregel erforderlich.
$u = 5x + 1$ $\qquad u' = 5$
$v = e^{2x}$ $\qquad v' = 2e^{2x}$
$f'(x) = u'vb + v'u = 5e^{2x} + 2(5x + 1)e^{2x} = e^{2x}(5 + 10x + 2) = e^{2x}(10x + 7)$

Lösung A5

1.1 $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$
Der Sinus ist bei $\frac{3}{2}\pi = -1$. Wenn in der Klammer nicht $\frac{3}{2}\pi$ steht, ist der Ausdruck nicht -1.
$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \quad x = 3\pi$

Abituraufgaben Analysis BG *(ohne Hilfsmittel)* Musteraufgaben

1.2 Wegen Symmetrie mit der y-Achse gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Umständliche Lösung:

Bedingungen aus Text ablesbar:

$f(0) = -1$, $f(3) = 0$ sowie $f'(3) = 0$.

$f(0) = -1 \Longrightarrow \; c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

(I)	$81a + 9b - 1 = 0$	$\mid \; \cdot 6$
(II)	$108a + 6b = 0$	$\mid \; \cdot 9$
(I)	$486a + 54b = 6$	
(II)	$972a + 54b = 0$	
(II)-(I)	$486a = -6$	$\mid \; \cdot 486$
	$a = -\frac{1}{81}$	

$a \longrightarrow$(I)

$-\frac{1}{81} \cdot 81 + 9b - 1 = 0$

$9b = 2 \quad \mid \; :2$

$b = \frac{2}{9}$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

Einfache Lösung:

$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$ bedeutet Berührpunkt mit der x-Achse, also doppelte Nullstelle. Wegen der Symmetrie ist $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle. Somit lautet die Funktionsgleichung:

$f(x) = a(x-3)^2 \cdot (x+3)^2$

Punktprobe mit $f(0) = -1$

$-1 = a \cdot 9 \cdot 9 \Longrightarrow \; a = -\frac{1}{81}$

$f(x) = -\frac{1}{81}\left((x-3)(x+3)\right)^2 = -\frac{1}{81}(x^2-9)^2$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

1.3 $-x^2 + 2 = e^x$ besitzt genau zwei Lösungen. Zum einen ist e^x streng monoton steigend ist, zum anderen ist $-x^2 + 2$ eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(0|2)$, der oberhalb dem Schnittpunkt $S_y(0|1)$ von e^x mit der y -Achse liegt.

1.4

- Das Schaubild hat bei $x = -1$ einen Tief- und bei $x = 2$ einen Hochpunkt. Dazwischen liegt ein Wendepunkt mit einer Steigung größer eins.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
  Die Steigung von h bei $x = 1$ ist positiv, die bei $x = 3$ negativ, somit ist $h'(1) \cdot h'(3) < 0$.
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
  Die Fläche unter dem Schaubild von h im Intervall $[1;3]$ ist kleiner als 10, Ablesen von Kästchen im Schaubild.
- Das Schaubild von h verläuft im Intervall $[0;4]$ oberhalb der x-Achse, somit ist jede Stammfunktion von h in diesem Intervall streng monoton steigend.

Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A6

1.1 Abbildung 1 stellt das Schaubild mit der Gleichung $y = a\cos(kx) + b$ dar.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-(-2)}{2} = 1{,}5$

$b = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5$

$k = \frac{2\pi}{p}$

$p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 3 - 0 = 2$

$k = \frac{2}{3}\pi$

$y = 1{,}5\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) - 0{,}5$

1.2 Die Funktionen u mit $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und v mit $v(x) = -2\cos(x) + 1$ schließen zwischen der y-Achse und dem kleinsten positiven Schnittpunkt eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt exakt.

Zum Verständnis (nicht Gegenstand eines Klausuraufschriebs):

Über die Gleichsetzung $u(x) = v(x)$ wird der kleinste positiver Schnittpunkt der beiden Funktionen ermittelt. Danach wird die Fläche berechnet aus dem Integral „Obere Kurve minus untere Kurve“, also $\int_0^{x_S}(u(x) - v(x))\,dx$.

1.3 $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$n(x) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot x + f(0)$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f'(0) = -1$

$f(0) = 1$

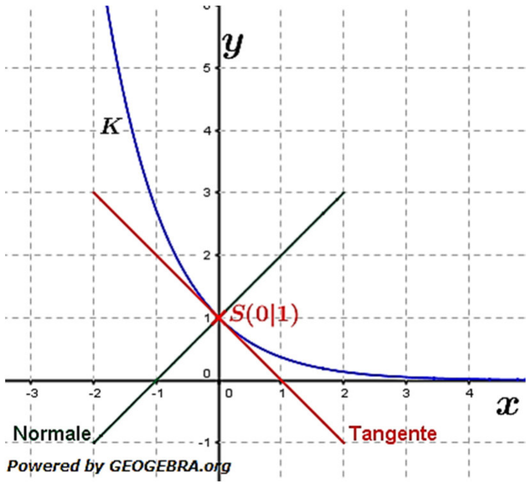
$t(x) = -x + 1$

$n(x) = x + 1$

$t(x) = 0 = -x + 1 \Rightarrow x_{t_0} = 1$

$n(x) = 0 = x + 1 \Rightarrow x_{t_n} = -1$

Die beiden Nullstellen von t und n liegen symmetrisch zur y-Achse. Die beiden Nullstellen bilden zusammen mit dem Punkt $S(0|1)$ ein Dreieck, welches symmetrisch zur y-Achse ist und damit auch gleichschenklig.



1.4 (1) Die Aussage ist falsch. g ist an der Stelle $x_0 = 2$ rechtsdrehend, somit ist $g''(2) < 0$.

(2) Die Aussage ist falsch. An der Grafik lesen wir ab, dass g bei etwa $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ den Funktionswert 4 hat, also hat C_g bei $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ die Steigung 4, somit im vorgegebenen Intervall nur einmal die Steigung 4.

(3) Die Aussage ist richtig. Die Fläche unter g im Intervall $[2;3]$ ist nur geringfügig größer als die Fläche unter g im Intervall $[3;4]$, damit ist die Differenz der beiden Flächen kleiner als 1.

Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A7

1.1 $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

Berechnung der Nullstelle:

$f(x) = e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1 \implies x = 0$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f'(0) = 2; \quad f(0) = 0$

$t(x) = 2 \cdot (x-0) = 2x$

1.2 Polynomfunktion dritten Grades: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir benötigen insgesamt 4 Bedingungen zur Aufstellung eines LGS.

Aus dem Text lesen wir ab:

(1)	$p(-4) = -4$	Punktprobe mit $W(-4\|-4)$
(2)	$p''(-4) = 0$	W ist Wendepunkt
(3)	$p'(-2) = 0$	Extrempunkt bei $x = -2$
(4)	$p'(-4) = -\frac{1}{m_n}$	Steigung der Tangente in W

m_n:

$m_n = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-0}{-4-8}$ | Normale durch $W(-4|-4)$ und

$= \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$ | $Q(8|0)$

(4) $p'(-4) = -3$

1.3 Abbildung 1 kann nicht durch Martins Formel dargestellt werden, da bei $x = -3$ eine dreifache Nullstelle besteht, das Formelglied $(x+3)$ jedoch keinen Exponenten hat.

Für Abbildung 2 gilt: $-x(x+1)^2(x+3)$

Für Abbildung 3 gilt: $0{,}25x(x+1)(x+3)$

1.4 (1) C' hat in $x = -2$ eine Nullstelle mit VZW von $+$ nach $-$, also hat C an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.

(2) C' hat im dargestellten Intervall 3 Extremstellen, also hat C im Intervall 3 Wendepunkte.

(3) C' hat in $x = 1$ negative Steigung. Damit ist C'' in $x = 1$ negativ und somit C an dieser Stelle rechtsgekrümmt.

(4) C' hat im dargestellten Intervall 2 Nullstellen mit Vorzeichenwechsel und eine doppelte Nullstelle in $x = 0$. Somit hat C drei Stellen mit waagrechter Tangente, zwei Extremstellen bei $x = -2$ und $x = 3$ sowie einen Sattelpunkt bei $x = 0$.