

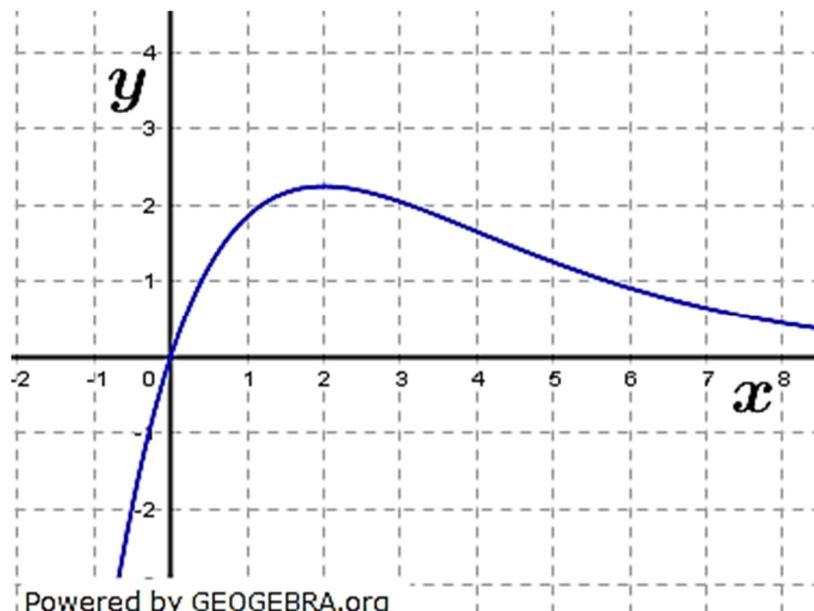


Aufgabe A1/2017

- 1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ an. (2P)
- 1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: (2P)
 $g'(3) = 2$
 $g''(3) = 0$
 $g'''(3) \neq 0$
 Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?
- 1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. (3P)
- 1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h , deren Schaubild durch den Punkt $P(0|5)$ verläuft. (3P)
- 1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$.
- 1.4.1 Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1$.
 Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion zwei verschiedene Werte für a , sodass gilt:
 $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$
 Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. (3P)
- 1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2)$ aus dem Schaubild von p hervorgeht. (2P)

Aufgabe A1/2018

- 1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f .



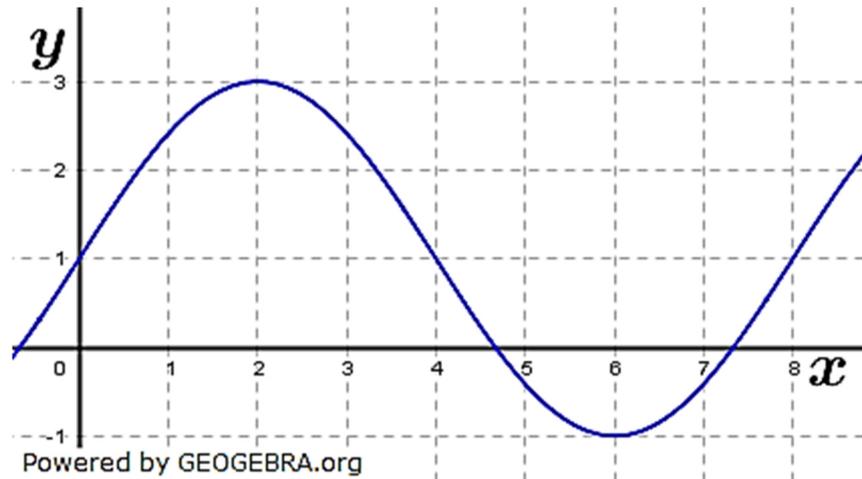
Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

- (1) Es gilt: $f''(1) < 0$
 - (2) Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0; 3]$.
 - (3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt. (6P)
- 1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g .
- (1) $g(x) = (2x + 1)^2$
 - (2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$ (3P)
- 1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.
- 1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$. (3P)
 - 1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x) dx$. (3P)

Aufgabe A1/2019

- 1.1 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion f .



- 1.1.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
 - (1) $f'(1) > 0$
 - (2) $\int_1^3 f(x) dx \geq 6$.
 - (3) Für jede Stammfunktion F von f gilt $F(4) = F(0)$. (6P)
- 1.1.2 Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt. (3P)
- 1.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$; $x \neq 0$. (2P)
- 1.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx$. (2P)
- 1.4 Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für $x > 0$.
 Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ (2P)

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

Aufgabe A1/2020

- 1.1 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.
 Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p . (4P)
- 1.2 Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einer Polynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K .

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$h(x)$	2,375	-2	-1,625	-1	-1,625	-2	2,375
$h'(x)$	-18	-2	2	0	-2	2	18
$h''(x)$	48	18	0	-6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.

- (1) $P(-1|2)$ liegt auf K .
 - (2) K besitzt zwei Wendepunkte.
 - (3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente. (6P)
- 1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)$; $x \in \mathbb{R}$.
- 1.3.1 Geben Sie zwei benachbarte Wendepunkte des Schaubildes von f an. (3P)
- 1.3.2 Ermitteln Sie einen Wert für $b > 10$, für den gilt: $\int_1^b f(x) dx = 0$. (2P)

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

Lösung A1/2017

1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$$3x^3 - 27x = 0$$

$$x(3x^2 - 27) = 0$$

$$x_1 = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x_2 = 3; \quad x_3 = -3$$

$$\mathbb{L} = \{-3; 0; 3\}$$

1.2 $g'(3) = 2; g''(3) = 0; g'''(3) \neq 0$:

Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt mit der Steigung $m = 2$.

1.3.1 Stellen waagrechter Tangenten mit $h'(x) = 0$:

$$h'(x) = 2e^{2x} - 4$$

$$2e^{2x} - 4 = 0$$

$$e^{2x} = 2$$

$$2x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$h\left(\frac{1}{2} \ln(2)\right) = e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln(2)} - 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$h\left(\frac{1}{2} \ln(2)\right) = 2 - 2 \cdot \ln(2) = 2(1 - \ln(2))$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P\left(\frac{1}{2} \ln(2) | 2(1 - \ln(2))\right)$.

1.3.2 $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$

$$5 = \frac{1}{2}e^0 - 2 \cdot 0 + C$$

| Punktprobe mit $P(0|5)$

$$5 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 4,5$$

Die Funktion $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + 4,5$ verläuft durch den Punkt $P(0|5)$.

1.4.1 Der Integralwert der gegebenen Kosinusfunktion hat im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ den Wert 1. Wegen der Achsensymmetrie der Kosinuskurve muss damit für $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ der Integralwert 2 entstehen.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktion und einem Integralwert von Null im Intervall von genau einer gesamten Periode, ist somit auch der Integralwert für $a_2 = a_1 - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$ gleich 2.

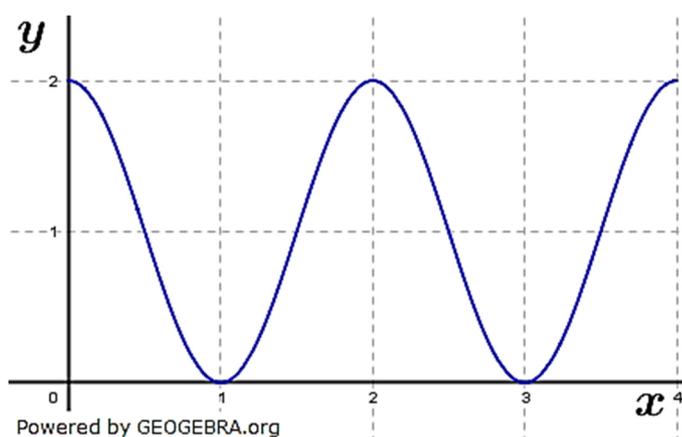
1.4.2 Das Schaubild der Funktion q geht aus dem Schaubild der Funktion p hervor durch:

1. Spiegelung von an der x -Achse;
2. Verschiebung in x -Richtung um zwei Einheiten nach links.

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

Lösung A1/2018

- 1.1 (1) Die Aussage ist wahr. K_f ist an der Stelle $x = 1$ rechtsgekrümmt.
 (2) Durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{f(3)-f(0)}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$
 $f'(0) \approx 3$ (aus Schaubild abgelesen)
 Die Aussage ist falsch.
 (3) Die Aussage ist richtig, f hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit VTW von „-“ nach „+“.
- 1.2 (1) $g(x) = (2x + 1)^2$
 abgeleitet mit der Kettenregel: $g'(x) = 4(2x + 1)$
 (2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$
 abgeleitet mit der Produktregel: $g'(x) = e^x + (x + 1) \cdot e^x = e^x \cdot (x + 2)$
- 1.3.1 $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$
 $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
 Amplitude $a = 1$, Verschiebung in y -Richtung $d = 1$.



1.3.2 $\int_0^2 h(x) dx = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot x) + x \right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2\pi) + 2 - \frac{1}{\pi} \cdot \sin(0)$
 $= 0 + 2 - 0 = 2$

Lösung A1/2019

- 1.1.1 (1) Die Aussage ist wahr.
 Die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 1$ ist positiv.
 (2) Die Aussage ist falsch.
 Die Fläche, die der Graph der Funktion mit der x -Achse im Intervall $I = [1; 3]$ einschließt ist kleiner als $6 FE$.
 (3) Die Aussage ist falsch.
 Der Graph der Funktion verläuft im Intervall $I = [0; 4]$ oberhalb der x -Achse. Damit ist die Stammfunktion F streng monoton steigend.
- 1.1.2 Das Schaubild der Funktion ist eine Sinuskurve mit der Amplitude $a = 2$ und der Periode $p = 8$. Das Schaubild ist um eine Stelle in y -Richtung nach oben verschoben.

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$$

1.2 $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$
 $g'(x) = 6x - 1 - \frac{1}{x^2}$

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

1.3 $\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx = 2 \cdot \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{4}{3}$

1.4 $e^{h(x)} = x$

Die Gleichung stellt die Gleichsetzung zweier Funktionen dar mit $f(x) = e^{h(x)}$ und $g(x) = x$, also $f(x) = g(x)$.

Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab:

$$f'(x) = g'(x)$$

$$h'(x) \cdot e^{h(x)} = 1 \quad | \quad : e^{h(x)}$$

$$h'(x) = \frac{1}{e^{h(x)}}$$

Somit wegen $e^{h(x)} = x$

$$h'(x) = \frac{1}{x} \quad | \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lösung A1/2020

1.1 Nullstellen von p mit $p(x) = x^3 - 100x$:

$$p(x) = 0$$

$$x^3 - 100x = 0$$

$$x(x^2 - 100) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0$$

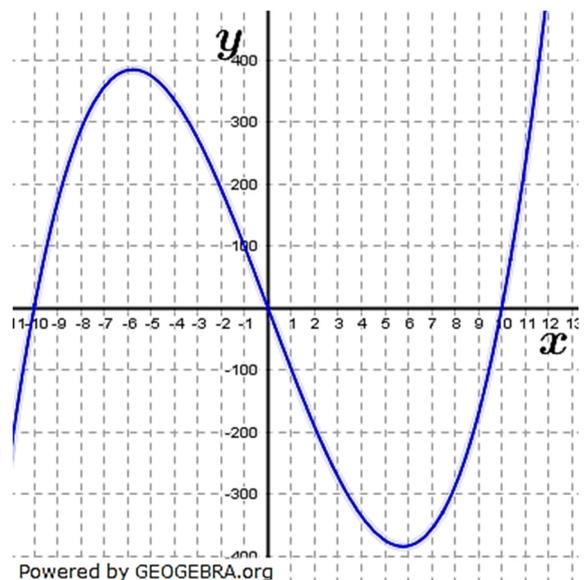
$$x^2 - 100 = 0$$

$$x_{2,3} = \pm 10$$

Der Graph der Funktion hat die Nullstellen $N_1 = (0|0)$, $N_2 = (-10|0)$, $N_3 = (10|0)$.

Skizze des Graphen ohne weitere Rechnung:

Polynomfunktion Grades kommt aus dem III. Quadranten und verläuft in den I. Quadranten. Einzeichnung der errechneten Nullstellen und skizzieren des Graphen – siehe Grafik rechts.



1.2 zu (1):

$P(-1|2)$ liegt nicht auf K , denn

$$f(-1) = -2.$$

Zu (2):

K besitzt zwei Wendepunkte.

Die zweite Ableitung hat zwei Nullstellen mit VZW. Daher hat das Schaubild an diesen Stellen Wendepunkte.

Weitere Wendepunkte existieren nicht, da eine Polynomfunktion 4. Grades maximal 2 Wendepunkte haben kann.

Zu (3):

K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.

$f'(0) = 0$ ist gegebene Stelle mit waagrechter Tangente. Zwischen $f'(-1)$ und $f'(-0,5)$ liegt ein Vorzeichenwechsel von f' vor, somit ist im Intervall $-1 < x < -0,5$ eine weitere Nullstelle. Gleiches gilt für $f'(0,5)$ und $f'(1)$ im Intervall $0,5 < x < 1$.

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

1.3.1 Benachbarte Wendepunkte:

Beim unverschobenen Sinus mit $g(x) = \sin(x) + d$ liegen die Wendepunkte bei $W_k(k \cdot \pi | d)$; $k \in \mathbb{Z}$, benachbart zum Beispiel bei $W_0(0 | d)$ und $W_1(\pi | d)$.

Die gegebene Funktion f ist in y -Richtung nicht verschoben, also $d = 0$.

Die gegebene Funktion f hat eine Amplitude von $a = 3$. Die Amplitude hat auf den y -Wert der Wendepunkte keinen Einfluss.

Die gegebene Funktion f hat das Sinusargument $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. Somit muss gelte:

$$\text{Wendepunkt 1: } 2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0 \\ x = -\frac{\pi}{12}$$

$$\text{Wendepunkt 2: } 2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \pi \\ x = \frac{5}{12}\pi$$

Die zwei benachbarten Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1\left(-\frac{\pi}{12} \mid 0\right)$ und $W_2\left(\frac{5}{12}\pi \mid 0\right)$.

1.3.2 Das Integral im Intervall $I = [0; n \cdot p]$; $n \in \mathbb{Z}$ unter einer Sinuskurve ist 0, da die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der x -Achse gleich groß sind.

Die gegebene Funktion f hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Zahl $b = 10$ wird mit 3π überschritten, sodass gilt:

$$\int_1^{3\pi+1} f(x) dx = 0.$$