Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

Lösung A1/2017

1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:
$3x^3 - 27x = 0$
$x(3x^2 - 27) = 0$
$x_1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$3x^2 - 27 = 0$
$x^2 = 9$
$x_2 = 3;\quad x_3 = -3$
$\mathbb{L} = \{-3; 0; 3\}$

1.2 $g'(3) = 2; g''(3) = 0;\; g'''(3) \neq 0$:
Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt mit der Steigung $m = 2$.

1.3.1 Stellen waagrechter Tangenten mit $h'(x) = 0$:
$h'(x) = 2e^{2x} - 4$
$2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
$2x = ln(2) \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2} ln\,(2)$
$h\left(\frac{1}{2} ln\,(2)\right) = e^{2\cdot\frac{1}{2} ln\,(2)} - 4 \cdot \frac{1}{2} ln\,(2)$
$h\left(\frac{1}{2} ln\,(2)\right) = 2 - 2 \cdot ln(2) = 2(1 - ln(2))$
Der Punkt hat die Koordinaten $P(\frac{1}{2} ln\,(2)|2(1 - ln(2))$.

1.3.2 $H(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 + C$
$5 = \frac{1}{2} e^0 - 2 \cdot 0 + C$ | Punktprobe mit $P(0|5)$
$5 = \frac{1}{2} + C \Longrightarrow \quad C = 4{,}5$
Die Funktion $H(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - 2x^2 + 4{,}5$ *verläuft durch den Punkt* $P(0|5)$.

1.4.1 Der Integralwert der gegebenen Kosinusfunktion hat im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ den Wert 1. Wegen der Achsensymmetrie der Kosinuskurve muss damit für $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ der Integralwert 2 entstehen.
Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktion und einem Integralwert von Null im Intervall von genau einer gesamten Periode, ist somit auch der Integralwert für $a_2 = a_1 - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$ gleich 2.

1.4.2 Das Schaubild der Funktion q geht aus dem Schaubild der Funktion p hervor durch:
1. Spiegelung von an der x-Achse;
2. Verschiebung in x-Richtung um zwei Einheiten nach links.

Lösung A1/2018

1.1 (1) Die Aussage ist wahr. K_f ist an der Stelle $x = 1$ rechtsgekrümmt.

(2) Durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{f(3)-f(0)}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$

$f'(0) \approx 3$ (aus Schaubild abgelesen)

Die Aussage ist falsch.

(3) Die Aussage ist richtig, f hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit VTW von „-„ nach „+“.

1.2 (1) $g(x) = (2x+1)^2$

abgeleitet mit der Kettenregel: $g'(x) = 4(2x+1)$

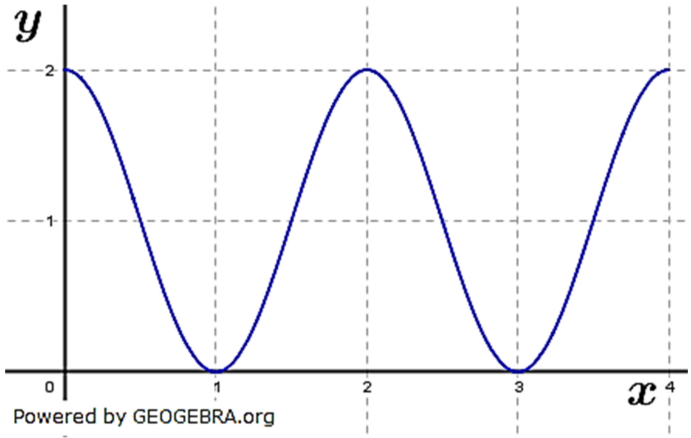
(2) $g(x) = (x+1) \cdot e^x$

abgeleitet mit der Produktregel: $g'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)$

1.3.1 $h(x) = cos(\pi \cdot x) + 1$

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Amplitude $a = 1$, Verschiebung in y-Richtung $d = 1$.



1.3.2 $\int_0^2 h(x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi} sin(\pi \cdot x) + x\right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \cdot sin(2\pi) + 2 - \frac{1}{\pi} \cdot sin\,(0)$

$= 0 + 2 - 0 = 2$

Lösung A1/2019

1.1.1 (1) Die Aussage ist wahr.

Die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 1$ ist positiv.

(2) Die Aussage ist falsch.

Die Fläche, die der Graph der Funktion mit der x-Achse im Intervall $I = [1; 3]$ einschließt ist kleiner als $6\,FE$.

(3) Die Aussage ist falsch.

Der Graph der Funktion verläuft im Intervall $I = [0; 4]$ oberhalb der x-Achse. Damit ist die Stammfunktion F streng monoton steigend.

1.1.2 Das Schaubild der Funktion ist eine Sinuskurve mit der Amplitude $a = 2$ und der Periode $p = 8$. Das Schaubild ist um eines Stelle in y-Richtung nach oben verschoben.

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$$

1.2 $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$

$g'(x) = 6x - 1 - \frac{1}{x^2}$

1.3 $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2}\cdot x\right)^2 dx = 2\cdot\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{1} = 2\cdot\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}$

1.4 $e^{h(x)} = x$

Die Gleichung stellt die Gleichsetzung zweier Funktionen dar mit $f(x) = e^{h(x)}$ und $g(x) = x$, also $f(x) = g(x)$.

Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab:

$f'(x) = g'(x)$

$h'(x)\cdot e^{h(x)} = 1 \quad | \quad :e^{h(x)}$

$h'(x) = \frac{1}{e^{h(x)}}$

Somit wegen $e^{h(x)} = x$

$h'(x) = \frac{1}{x} \quad |$ **q.e.d.**

Lösung A1/2020

1.1 *Nullstellen von p mit $p(x) = x^3 - 100x$:*

$p(x) = 0$

$x^3 - 100x = 0$

$x(x^2 - 100) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

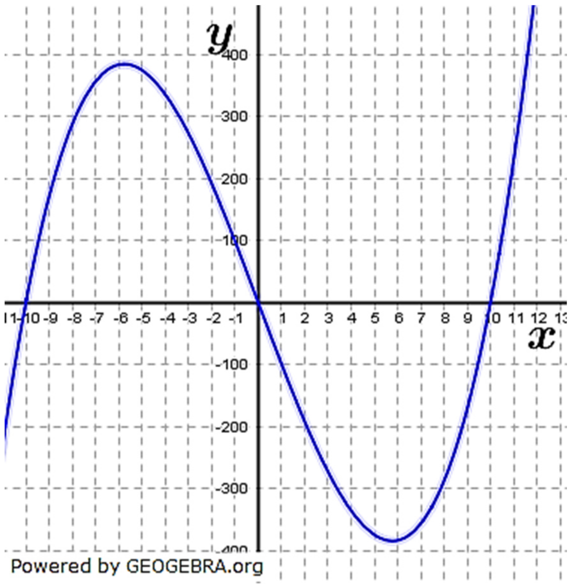
$x^2 - 100 = 0$

$x_{2,3} = \pm 10$

Der Graph der Funktion hat die Nullstellen $N_1 = (0|0)$, $N_2 = (-10|0)$, $N_3 = (10|0)$.

Skizze des Graphen ohne weitere Rechnung:

Polynomfunktion   Grades kommt aus dem III. Quadranten und verläuft in den I. Quadranten. Einzeichnung der errechneten Nullstellen und skizzieren des Graphen – siehe Grafik rechts.



1.2 zu (1):

$P(-1|2)$ liegt nicht auf K, denn $f(-1) = -2$.

Zu (2):

K besitzt zwei Wendepunkte.

Die zweite Ableitung hat zwei Nullstellen mit VZW. Daher hat das Schaubild an diesen Stellen Wendepunkte.

Weitere Wendepunkte existieren nicht, da eine Polynomfunktion 4.Grades maximal 2 Wendepunkte haben kann.

Zu (3):

K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.

$f'(0) = 0$ ist gegebene Stelle mit waagrechter Tangente. Zwischen $f'(-1)$ und $f'(-0{,}5)$ liegt ein Vorzeichenwechsel von f' vor, somit ist im Intervall $-1 < x < -0{,}5$ eine weitere Nullstelle. Gleiches gilt für $f'(0{,}5)$ und $f'(1)$ im Intervall $0{,}5 < x < 1$.

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) 2017-2020

1.3.1 *Benachbarte Wendepunkte:*

Beim unverschobenen Sinus mit $g(x) = si\,n(x) + d$ liegen die Wendepunkte bei $W_K(k \cdot \pi|d);\ k \in \mathbb{Z}$, benachbart zum Beispiel bei $W_0(0|d)$ und $W_1(\pi|d)$.
Die gegebene Funktion f ist in y-Richtung nicht verschoben, also $d = 0$.
Die gegebene Funktion f hat eine Amplitude von $a = 3$. Die Amplitude hat auf den y-Wert der Wendepunkte keinen Einfluss.
Die gegebene Funktion f hat das Sinusargument $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. Somit muss gelte:

Wendepunkt 1: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

$x = -\frac{\pi}{12}$

Wendepunkt 2: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \pi$

$x = \frac{5}{12}\pi$

Die zwei benachbarten Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1\left(-\frac{\pi}{12}\middle|0\right)$ und $W_2\left(\frac{5}{12}\pi\middle|0\right)$.

1.3.2 Das Integral im Intervall $I = [0; n \cdot p];\ n \in \mathbb{Z}$ unter einer Sinuskurve ist 0, da die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der x-Achse gleich groß sind.
Die gegebene Funktion f hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Zahl $b = 10$ wird mit 3π überschritten, sodass gilt:

$$\int_1^{3\pi+1} f(x)\,dx = 0.$$