



Aufgabe A1/2021

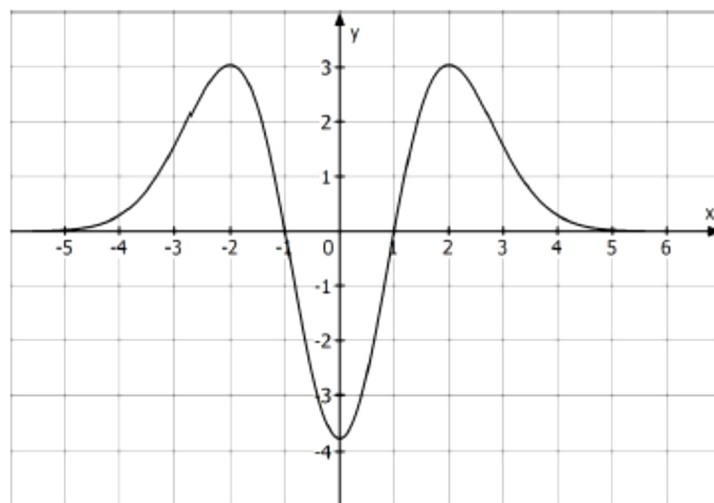
1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f .

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. (4P)

1.1.2 Ermitteln Sie die x -Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. (2P)

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion s .



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x) dx$ ist größer als 0. (5P)

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d .

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D . (4P)

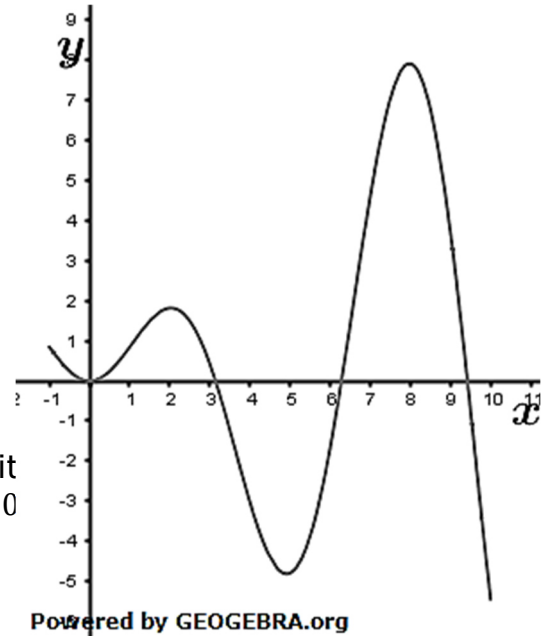
Aufgabe A1/2022

- 1.1 Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$.
Ordnen Sie die Werte $f(0)$, $f'(1)$ und $\int_0^1 f(x) dx$ nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge. (4P)

- 1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x \cdot \sin(x)$; $-1 \leq x \leq 10$.
Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g von g .

- 1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.
Geben Sie die Anzahl der Berührungspunkte an. (3P)

- 1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -x \cos(x) + \sin(x)$; $-1 \leq x \leq 10$ eine Stammfunktion von g ist.
Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0|7)$ enthält. (3P)



- 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:
- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0|1)$ unter einem rechten Winkel
 - Die x - und die y -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein. (5P)

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) ab 2021

Lösung A1/2021

1.1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2(-x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

x_1 ist doppelte Nullstelle

$$3 - x = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$\mathbb{L} = \{3; 0; \}$$

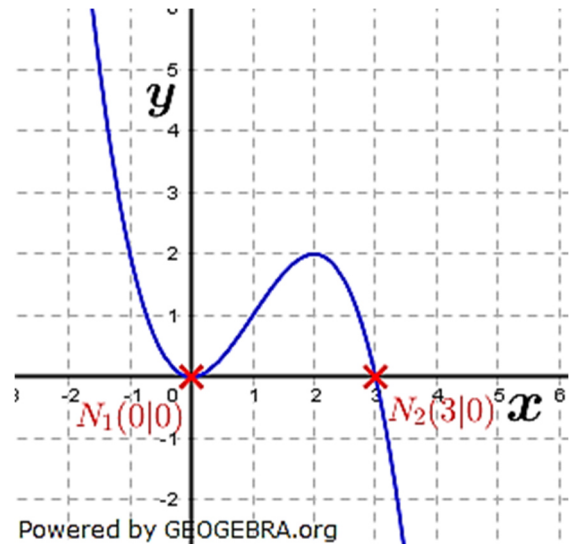
Skizze:

Überlegungen zur Skizzierung:

Die beiden Nullstellen sind errechnet, die doppelte Nullstelle führt zu einem Berührungspunkt mit der x -Achse.

Durch das Minuszeichen von $-\frac{1}{2}x^3$ kommt der Graph von ∞ und verläuft nach $-\infty$.

Damit ist die doppelte Nullstelle gleichzeitig ein Tiefpunkt, sodass zwischen den beiden Nullstellen noch ein Hochpunkt sein muss.



1.1.2 x -Koordinate des Punktes mit der Steigung $\frac{3}{2}$:

Steigungen berechnen wir mit der ersten Ableitung.

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}$$

$$| \quad -\frac{3}{2}; \cdot -2$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$| \quad :3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$$

An der Stelle $x = 1$ hat K_f die Steigung $\frac{3}{2}$.

1.2 (1) $s''(4) < 0$

Die Aussage ist falsch. Der Graph von s ist an der Stelle $x = 4$ linksgekrümmt, somit muss $s''(4) > 0$ sein.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

Die Aussage ist richtig. s hat im Intervall $0 < x < 2$ eine Wendestelle mit positiver Steigung.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x) dx$ ist größer als 0.

Die Aussage ist richtig. Durch Kästchenzählen stellen wir fest, dass die Fläche unter s im Intervall $0 \leq x \leq 1$ kleiner ist als die Fläche im Intervall $1 \leq x \leq 4$.

Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) ab 2021

1.3. $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

$$d(x) > 0 \text{ für alle } x > 0$$

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D .

$$d'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2x$$

$$d''(x) = -\frac{6}{x^4} + 2$$

$$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \quad | \cdot x^3$$

$$-2 + 2x^4 = 0$$

$$x^4 = 1 \quad | \sqrt[4]{}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Wegen Aufgabenstellung $x > 0$ ist nur $x_1 = 1$ eine Lösung.

$$d''(1) \neq 0$$

$x = 1$ ist damit die einzige Wendestelle von D .

Lösung A1/2022

1.1 $f(x) = 2 \cdot e^x$

$$f'(x) = 2 \cdot e^x$$

$$f(0) = 2; f'(1) = 2e$$

$$\int_0^1 2e^x dx = [2e^x]_0^1 = 2e - 2$$

Geordnete Werte: $2; 2e - 2; 2e$

1.2.1 $g(x) = x \cdot \sin(x); -1 \leq x \leq 10$.

Gemeinsamen Punkte von K_g mit

der ersten Winkelhalbierenden

$$y = x.$$

Gemeinsame Punkte durch

Gleichsetzung:

$$x \cdot \sin(x) = x$$

$$x \cdot \sin(x) - x = 0$$

$$x(\sin(x) - 1) = 0$$

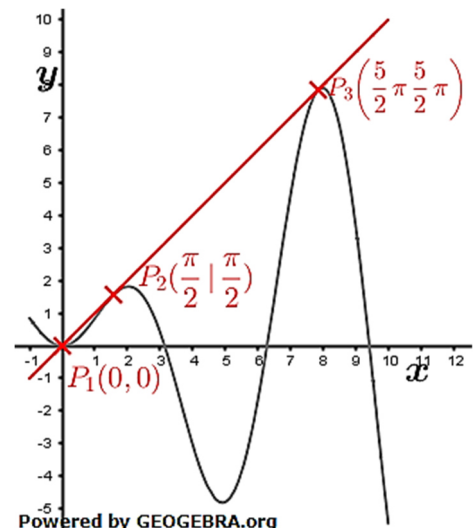
Satz vom Nullprodukt:

$$x_1 = 0$$

$$\sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = 1$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}; x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$$



Abituraufgaben BG Analysis (ohne Hilfsmittel) ab 2021

Berührungspunkte müssen gleich Steigung haben.

$$g'(0) = 0 \rightarrow \text{kein Berührungspunkt}$$

$$g(x) = x \cdot \sin(x)$$

$$g'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$g'\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$$

Die Steigung von $y = x$ ist ebenfalls 1. Die Punkte

$P_2\left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{2}\right)$ und $P_3\left(\frac{5}{2}\pi \mid \frac{5}{2}\pi\right)$ sind Berührungspunkte.

1.2.2 $G(x) = -x \cos(x) + \sin(x); -1 \leq x \leq 10$

Wir bilden $G'(x)$:

$$G'(x) = -\cos(x) + x \sin(x) + \cos(x) = x \sin(x) \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Stammfunktion von g durch $P(0|7)$ enthält.

$$G(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

$$7 = -0 \cdot \cos(0) + \sin(0) + C \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(0|7)$$

$$C = 7$$

$$G(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + 7$$

1.3 Allgemeine Form einer quadratischen Funktion:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Wir benötigen 3 Bedingungen zum Lösen der Koeffizienten a , b und c .

(I) $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 1 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } (0|1)$

(II) $p'(0) = -4 \quad |$

Orthogonalitätsbedingung

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$-4 = 2 \cdot 0 + b$$

$$b = -4$$

(II) $p(x) = p'(x) = 0$

$$2ax - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} = a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 1 \quad | \cdot a$$

$$2 = 4 - 8 + a$$

$$a = 6$$

$$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$$