Lösung A1/2021

1.1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2(-x+3) = 0$

$x_1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

x_1 ist doppelte Nullstelle

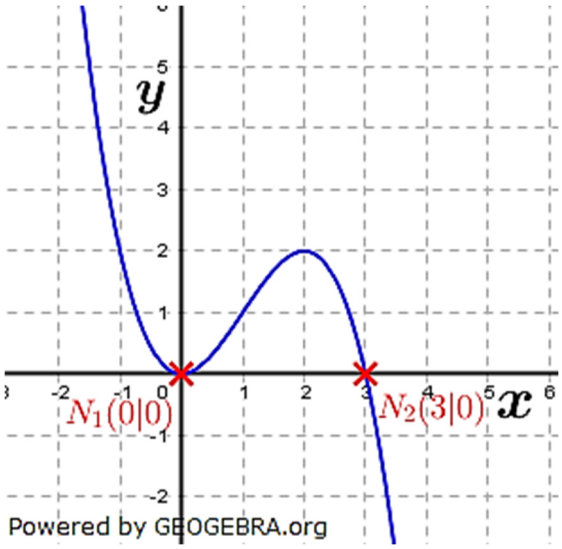
$3 - x = 0$

$x_2 = 3$

$\mathbb{L} = \{3; 0;\}$

Skizze:

Überlegungen zur Skizzierung:
Die beiden Nullstellen sind errechnet, die doppelte Nullstelle führt zu einem Berührpunkt mit der x-Achse.
Durch das Minuszeichen von $-\frac{1}{2}x^3$ kommt der Graph von ∞ und verläuft nach $-\infty$.
Damit ist die doppelte Nullstelle gleichzeitig ein Tiefpunkt, sodass zwischen den beiden Nullstellen noch ein Hochpunkt sein muss.



1.1.2 x-Koordinate des Punktes mit der Steigung $\frac{3}{2}$:

Steigungen berechnen wir mit der ersten Ableitung.

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

$f'(x) = \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}; \cdot -2$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$ | $:3$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$

An der Stelle $x = 1$ hat K_f die Steigung $\frac{3}{2}$.

1.2 (1) $s''(4) < 0$

Die Aussage ist falsch. Der Graph von s ist an der Stelle $x = 4$ linksgekrümmt, somit muss $s''(4) > 0$ sein.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

Die Aussage ist richtig. s hat im Intervall $0 < x < 2$ eine Wendestelle mit positiver Steigung.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

Die Aussage ist richtig. Durch Kästchenzählen stellen wir fest, dass die Fläche unter s im Intervall $0 \leq x \leq 1$ kleiner ist als die Fläche im Intervall $1 \leq x \leq 4$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.3. $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$

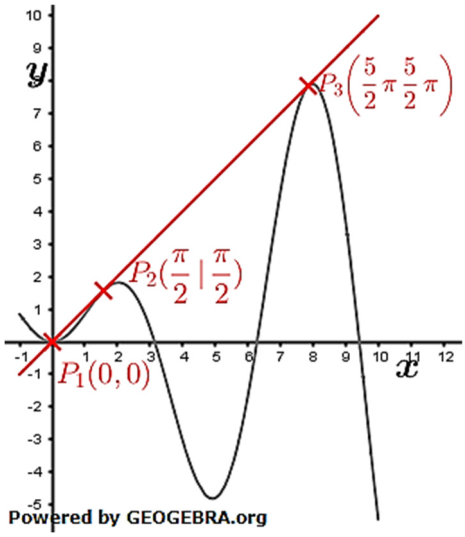
(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.
$d(x) > 0$ für alle $x > 0$

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.
$d'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2x$
$d''(x) = -\frac{6}{x^4} + 2$
$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \quad | \quad \cdot x^3$
$-2 + 2x^4 = 0$
$x^4 = 1 \quad | \quad \sqrt[4]{}$
$x_{1,2} = \pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $x > 0$ ist nur $x_1 = 1$ eine Lösung.
$d''(1) \neq 0$
$x = 1$ ist damit die einzige Wendestelle von D.

Lösung A1/2022

1.1 $f(x) = 2 \cdot e^x$
$f'(x) = 2 \cdot e^x$
$f(0) = 2;\ \ f'(1) = 2e$
$\int_0^1 2e^x\, dx = [2e^x\}_0^1 = 2e - 2$
Geordnete Werte: $2; 2e - 2; 2e$

1.2.1 $g(x) = x \cdot sin(x)\,;\ -1 \leq x \leq 10.$
Gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.
Gemeinsame Punkte durch Gleichsetzung:
$x \cdot sin(x) = x$
$x \cdot sin(x) - x = 0$
$x(sin(x) - 1) = 0$
Satz vom Nullprodukt:
$x_1 = 0$
$sin(x) - 1 = 0$
$sin(x) = 1$
$x_2 = \frac{\pi}{2};\ \ x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$



Berührpunkte müssen gleich Steigung haben.
$g'(0) = 0$ ➔ kein Berührpunkt
$g(x) = x \cdot sin(x)$
$g'(x) = \sin(x) + xcos(x)$
$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$g'\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$
Die Steigung von $y = x$ ist ebenfalls 1. Die Punkte $P_2\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right)$ und ist $P_3\left(\frac{5}{2}\pi\middle|\frac{5}{2}\pi\right)$ sind Berührpunkte.

1.2.2 $G(x) = -xcos(x) + sin(x)\,;\ -1 \leq x \leq 10$
Wir bilden $G'(x)$:
$G'(x) = -\cos(x) + xsin(x) + \cos(x) = xsin(x)$ **q.e.d.**
Stammfunktion von g durch $P(0|7)$ enthält.
$G(x) = -xcos(x) + sin(x) + C$
$7 = -0 \cdot cos(0) + sin(0) + C$ | Punktprobe mit $P(0|7)$
$C = 7$
$G(x) = -xcos(x) + sin(x) + 7$

1.3 Allgemeine Form einer quadratische Funktion:
$p(x) = ax^2 + bx + c$
Wir benötigen 3 Bedingungen zum Lösen der Koeffizienten a, b und c.
(I) $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ ➔ $c = 1$ | Punktprobe mit $(0|1)$
(II) $p'(0) = -4$ |
Orthogonalitätsbedingung
$p'(x) = 2ax + b$
$-4 = 2 \cdot 0 + b$
$b = -4$
(II) $p(x) = p'(x) = 0$
$2ax - 4 = 0$
$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$
$\frac{2}{a} = a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 1$ | $\cdot a$
$2 = 4 - 8 + a$
$a = 6$
$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$