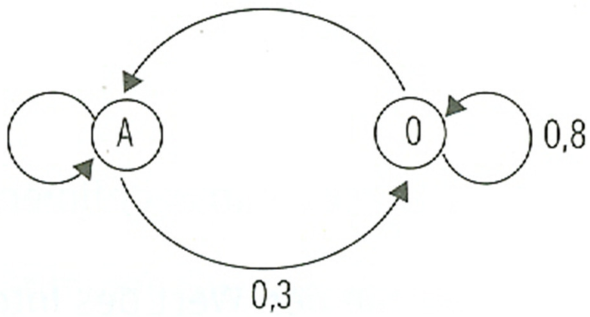
Aufgaben Matrizen und Prozesse BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben

Aufgabe A1

3.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich einen der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) und Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. **4P**
Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ 0{,}3 & \dots \end{pmatrix}$ an.
Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonalen M^2.

3.2 Gegeben ist die Matrix **3P**
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
Lösen Sie die Matrizengleichung $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;
$\boldsymbol{E}$ ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

Aufgabe A2

3.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS. Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. **4P**
Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.
Begründe, dass in der Hauptdiagonalen der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

3.2 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{X}$ sind $3x3$-Matrizen. Bei welcher der folgenden Terme kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden? **4P**

(1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}$
(2) $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$

In manchen Fällen kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Aufgabe A3

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1 S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichne das zugehörige Übergangsdiagramm. **1P**

3.1.2 Zeige, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. **2P**

3.1.3 Tom: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor.“ Beurteile diese Aussage. **2P**

3.2 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe A4

3.1 Berechne die Inverse zu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **2P**

3.2 „Da die Division zweier Matrizen nicht definiert ist, benötigt man inverse Matrizen, um Matrizengleichungen zu lösen.“ Erläutere diese Aussage anhand einer selbst gewählten Matrizengleichung. **1P**

3.3 Berechne $\boldsymbol{X}$ aus $\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}$ mit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **3P**

Aufgabe A5

3.1 Berechne die Inverse zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **2P**

3.2 Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$ **3P**
beschreibt eine stochastische Austauschmatrix.
Welche Werte für c und d sind möglich?
Für welchen Wert von c ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ein Stabilitätsvektor?

Aufgabe A6

3.1 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + \ \ x_2 \ + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3.2 Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit Ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliches Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:
$20\,\%$ der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C, kein Käufer wechselt zu Sorte B. $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A, $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zur Sorte C. $10\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zur Sorte A, $20\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

3.2.1 Gib die zugehörige Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ an. **1P**

3.2.2 Erläutere die Bedeutung der Elemente a_{11}, a_{22} und a_{33} von $\boldsymbol{A}^3$. **2P**

Aufgabe A7

3.1 Ein zoologisches Institut hält eine Käfer-Art unter künstlichen Bedingungen in einem abgeschlossenen Schaukasten. Die Käfer-Art durchläuft drei Entwicklungsstadien: Eier (E), Larven (L) und Käfer (K). Die Übergangsmatrix für einen Entwicklungszyklus von drei Wochen ist **5P**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

bezogen auf den Populationsvektor $\begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}$.

Darin bedeutet d die durchschnittliche Anzahl der Eier, die pro Käfer in einem Entwicklungszyklus gelegt werden.
Das Institut möchte die Population möglichst konstant halten. Es kann über Beleuchtung und Temperatur die Anzahl d beeinflussen.
Bestimme die Anzahl d so, dass es möglich ist, eine Käfer-Population einzurichten, die sich in Zusammensetzung und Gesamtzahl in jedem Zyklus reproduziert.

Lösung A1

3.1 $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

3.2 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0{,}2x_1 - 0{,}6x_2 = 0 \Longrightarrow \ x_1 = 3x_2$

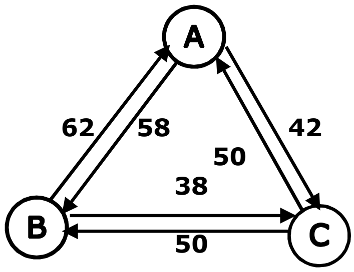
$-0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 = 0 \Longrightarrow \ x_1 = 3x_2$

Wir wählen $x_2 = u$.

Somit ergibt sich: $x = \begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}; \ u \in \mathbb{R}$

Lösung A2

3.1



In der Hauptdiagonalen der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schreibt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.

3.2 Bei (1) kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{X}$

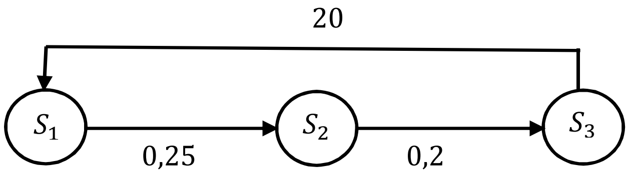
Bei (2) kann man $\boldsymbol{X}$ nicht ausklammern, da $\boldsymbol{X}$ von links mit $\boldsymbol{A}$ und von rechts mit $\boldsymbol{B}$ multipliziert wird.

Wenn $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen.

Eine mögliche Matrix dafür ist $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung A3

3.1.1 Übergangsdiagramm:



3.1.2 Stationäre Verteilung: $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x}=\vec{x}$

$$\boldsymbol{A}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 20\\ 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 50\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\ 50\\ 10\end{pmatrix}$$

Somit gilt $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.
Die gegebene Verteilung wiederholt sich von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt ja $0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 20=1$.
Somit liegt hier eine zyklische Population mit einem dreimonatigen Zyklus vor. Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.
Nur bestimmte Verteilungen, beispielsweise $\begin{pmatrix}200\\ 50\\ 10\end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

3.2 3.1

Gauß-Schema

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II	1	1	1	10	I-II
III	0	1	1	8	

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II‵	0	1	1	8	
III‵	0	1	1	8	$II'-III'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II‵	0	1	1	8	
III‵‵	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält nur noch Nullen, das LGS hat unendlich viele Lösungen. In der zweiten Zeile ist ein Parameter frei wählbar, z. B. $x_3=t$. Daraus ergibt sich:

$x_2=8-t$
$x_1+2(8-t)+2t=18$
$x_1=2$

Lösungsvektor: $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}2\\ 8-t\\ t\end{pmatrix}\right\}$

Lösung A4

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$

$\boldsymbol{B^{-1}}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

3.2 Selbst gewählte Matrizengleichung:

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$	$\cdot\,\boldsymbol{A^{-1}}$ von links
$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A^{-1}}\cdot\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A^{-1}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

3.3

$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}$	
$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$	Sortieren
$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$	Ausklammern, $\cdot\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ von links
$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}5\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0{,}5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	mit $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B^{-1}}$:

Lösung A5

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 8 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 3\\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

Inverse $\boldsymbol{A^{-1}}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4 & -8 & 3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3.2 Übergangsmatrix $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}c & 0{,}5\\ d & 0{,}5\end{pmatrix}$

Stochastischer Austauschprozess mit Spaltensumme 1.

Werte für c und d sind möglich zwischen 0 und 1; $c,d\in[0;1]$ mit $c+d=1$.

$\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\end{pmatrix}$ ist ein Stabilitätsvektor, wenn $\boldsymbol{M}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

$\begin{pmatrix}c & 0{,}5\\ d & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\end{pmatrix}$

ergibt

$0{,}6c+0{,}2=0{,}6\Longrightarrow\ c=\frac{2}{3}$

$0{,}6d+0{,}2=0{,}4\Longrightarrow\ d=\frac{1}{3}$

Lösung A6

3. 1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	1	8	
II	1	4	1	10	II-I
III	1	1	1	3	III-I

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	8	
II‘	0	2	0	2	
III‘	0	-1	0	-7	$\text{II}' + 2 \cdot \text{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	8	
II‘	0	2	0	2	
III‘‘	0	0	0	-12	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält Nullen und im Ergebnis eine Zahl, das LGS hat keine Lösung.

3.2.1 Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Die Elemente der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{A}^3$ geben den jeweiligen Anteil der Käufer an, die ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt, 3 Monate später wieder die gleiche Kaffeesorte wählen.

Lösung A7

3.1 Das LGS zu der Gleichung $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ darf nicht eindeutig bestimmt sein, da sonst der Nullvektor der einzige Lösungsvektor wäre.

Hinweis: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \iff (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}, \text{ führt auf } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Umformung: } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}3d & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}3d & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}4 + 0{,}6d & 0 \end{array}\right)$$

Eine mögliche Auflösung führt auf eine Stufenform mit der Zeile

$$(-2{,}4 + 0{,}6d) \cdot x_K = 0.$$

Daraus folgt, dass $d = 4$ sein muss, (da $x_K = 0$ keine Lösung sein kann).