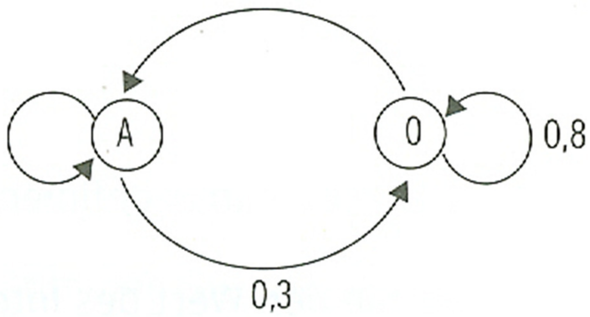
Aufgaben Matrizen und Prozesse BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben

Aufgabe A1

3.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich einen der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) und Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert. **4P**



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ 0{,}3 & \dots \end{pmatrix}$ an.
Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonalen M^2.

3.2 Gegeben ist die Matrix **3P**
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
Lösen Sie die Matrizengleichung $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;
$\boldsymbol{E}$ ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

Aufgabe A2

3.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS. Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. **4P**
Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.
Begründe, dass in der Hauptdiagonalen der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

3.2 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{X}$ sind $3x3$-Matrizen. Bei welcher der folgenden Terme kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden? **4P**

(1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}$
(2) $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$

In manchen Fällen kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

Aufgabe A3

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1 S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichne das zugehörige Übergangsdiagramm. **1P**

3.1.2 Zeige, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. **2P**

3.1.3 Tom: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor." Beurteile diese Aussage. **2P**

3.2 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe A4

3.1 Berechne die Inverse zu $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **2P**

3.2 „Da die Division zweier Matrizen nicht definiert ist, benötigt man inverse Matrizen, um Matrizengleichungen zu lösen." Erläutere diese Aussage anhand einer selbst gewählten Matrizengleichung. **1P**

3.3 Berechne $\boldsymbol{X}$ aus $\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}$ mit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **3P**

Aufgabe A5

3.1 Berechne die Inverse zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **2P**

3.2 Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$ beschreibt eine stochastische Austauschmatrix. **3P**
Welche Werte für c und d sind möglich?
Für welchen Wert von c ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ein Stabilitätsvektor?

Aufgabe A6

3.1 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + \ \ x_2 \ + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3.2 Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit Ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliches Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:
$20\,\%$ der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C, kein Käufer wechselt zu Sorte B. $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A, $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zur Sorte C. $10\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zur Sorte A, $20\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

3.2.1 Gib die zugehörige Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ an. **1P**

3.2.2 Erläutere die Bedeutung der Elemente a_{11}, a_{22} und a_{33} von $\boldsymbol{A}^3$. **2P**

Aufgabe A7

3.1 Ein zoologisches Institut hält eine Käfer-Art unter künstlichen Bedingungen in einem abgeschlossenen Schaukasten. Die Käfer-Art durchläuft drei Entwicklungsstadien: Eier (E), Larven (L) und Käfer (K). Die Übergangsmatrix für einen Entwicklungszyklus von drei Wochen ist **5P**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

bezogen auf den Populationsvektor $\begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}$.

Darin bedeutet d die durchschnittliche Anzahl der Eier, die pro Käfer in einem Entwicklungszyklus gelegt werden.
Das Institut möchte die Population möglichst konstant halten. Es kann über Beleuchtung und Temperatur die Anzahl d beeinflussen.
Bestimme die Anzahl d so, dass es möglich ist, eine Käfer-Population einzurichten, die sich in Zusammensetzung und Gesamtzahl in jedem Zyklus reproduziert.