Lösung A1

3.1 $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

3.2 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0{,}2x_1 - 0{,}6x_2 = 0 \Longrightarrow \; x_1 = 3x_2$

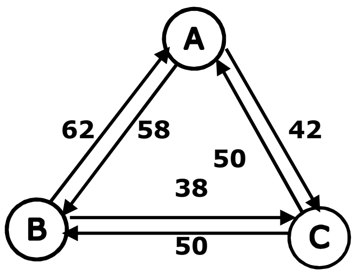
$-0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 = 0 \Longrightarrow \; x_1 = 3x_2$

Wir wählen $x_2 = u$.

Somit ergibt sich: $x = \begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}; \; u \in \mathbb{R}$

Lösung A2

3.1



In der Hauptdiagonalen der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schreibt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.

3.2 Bei (1) kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{X}$

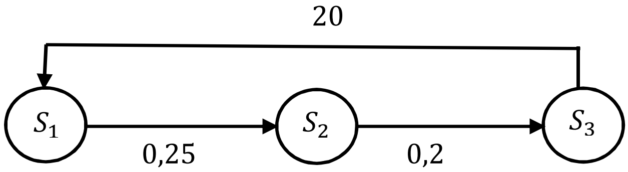
Bei (2) kann man $\boldsymbol{X}$ nicht ausklammern, da $\boldsymbol{X}$ von links mit $\boldsymbol{A}$ und von rechts mit $\boldsymbol{B}$ multipliziert wird.

Wenn $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen.

Eine mögliche Matrix dafür ist $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung A3

3.1.1 Übergangsdiagramm:



3.1.2 Stationäre Verteilung: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
Die gegebene Verteilung wiederholt sich von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt ja $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 20 = 1$.
Somit liegt hier eine zyklische Population mit einem dreimonatigen Zyklus vor. Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.
Nur bestimmte Verteilungen, beispielsweise $\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

3.2 3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	18	
II	1	1	1	10	I-II
III	0	1	1	8	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	18	
II‘	0	1	1	8	
III‘	0	1	1	8	$\mathrm{II}' - \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	18	
II‘	0	1	1	8	
III‘‘	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält nur noch Nullen, das LGS hat unendlich viele Lösungen. In der zweiten Zeile ist ein Parameter frei wählbar, z. B. $x_3 = t$. Daraus ergibt sich:

$x_2 = 8 - t$
$x_1 + 2(8 - t) + 2t = 18$
$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 - t \\ t \end{pmatrix} \right\}$

Lösung A4

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 Selbst gewählte Matrizengleichung:

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$	|	$\cdot\, \boldsymbol{A^{-1}}$ von links
$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}} \cdot \boldsymbol{B}$	|	$\boldsymbol{A^{-1}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$

3.3 $\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$	|	Sortieren
$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$	|	Ausklammern, $\cdot\, (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}$ von links
$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}$		
$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	|	mit $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} = \boldsymbol{B^{-1}}$:

Lösung A5

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Inverse $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Stochastischer Austauschprozess mit Spaltensumme 1.

Werte für c und d sind möglich zwischen 0 und 1; $c, d \in [0; 1]$ mit $c + d = 1$.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein Stabilitätsvektor, wenn $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

$\begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

ergibt

$0{,}6c + 0{,}2 = 0{,}6 \Longrightarrow \;\; c = \frac{2}{3}$

$0{,}6d + 0{,}2 = 0{,}4 \Longrightarrow \;\; d = \frac{1}{3}$

Lösung A6

3. 1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	1	8	
II	1	4	1	10	II-I
III	1	1	1	3	III-I

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	8	
II‵	0	2	0	2	
III‵	0	-1	0	-7	$\mathrm{II}' + 2 \cdot \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	8	
II‵	0	2	0	2	
III‵‵	0	0	0	-12	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält Nullen und im Ergebnis eine Zahl, das LGS hat keine Lösung.

3.2.1 Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Die Elemente der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{A}^3$ geben den jeweiligen Anteil der Käufer an, die ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt, 3 Monate später wieder die gleiche Kaffeesorte wählen.

Lösung A7

3.1 Das LGS zu der Gleichung $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ darf nicht eindeutig bestimmt sein, da sonst der Nullvektor der einzige Lösungsvektor wäre.

Hinweis: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \iff (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}, \text{ führt auf } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

Umformung: $$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}3d & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & d & 0 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}3d & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}4 + 0{,}6d & 0 \end{array}\right)$$

Eine mögliche Auflösung führt auf eine Stufenform mit der Zeile

$$(-2{,}4 + 0{,}6d) \cdot x_K = 0.$$

Daraus folgt, dass $d = 4$ sein muss, (da $x_K = 0$ keine Lösung sein kann).