Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse (o. Hilfsmittel) 2017-2020

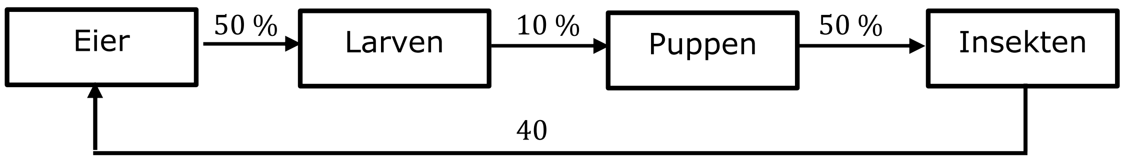
Aufgabe A3/2017

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\cdot x - 3\cdot y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2\cdot y + 3\cdot z &= 6 \end{aligned}$$ (3P)

3.2 In der Matrizengleichung $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ hat die Matrix $\boldsymbol{A}$ zwei Zeilen und vier Spalten.
Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix $\boldsymbol{B}$? (2P)

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert: (3P)



Aus $50\,\%$ der Eier werden Larven, von denen sich $10\,\%$ verpuppen. Aus $50\,\%$ der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.
Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.
Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Pupen und 300 Insekten.
Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach dem Modell nach 40 Tagen?
Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

Aufgabe A3/2018

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$ (3P)

3.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n\times n)$ – Matrizen invertierbar.
$\boldsymbol{E}$ ist die Einheitsmatrix.
Lösen Sie die Matrizengleichung

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$$

nach $\boldsymbol{E}$ auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich. (4P)

Aufgabe A3/2019

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y &= \tfrac{5}{3} \\ y - 2z &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$ (3P)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse (o. Hilfsmittel) 2017-2020

3.2 Im Folgenden ist $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und $\boldsymbol{A}$ eine Matrix mit $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

3.2.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, falls $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (3P)

3.2.2 Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach der 2×2-Matrix $\boldsymbol{X}$ auf:
$(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ (3P)

Aufgabe A3/2020

3.1 Betrachtet werden die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$.
$\boldsymbol{A}$ hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von $\boldsymbol{A}$ ist 3 x 7.
$\boldsymbol{B}$ hat das Format 7 x 2 und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ hat das Format 3 x 4.

Geben Sie das Format der Matrix $\boldsymbol{C}$ an. (2P)

3.2 Betrachtet wird eine Matrix $\boldsymbol{Q}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^{-1}$.
Vereinfachen Sie den Term $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (4 \cdot \boldsymbol{Q}) - 2 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{R}$ so weit wie möglich. (2P)

3.3 Gegeben sind die Matrizen
$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a \cdot (a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Es gilt $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$.
Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c.
Geben Sie die Anzahl der Lösungen in der Form $(a; b; c)$ an. (4P)

Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse *(o. Hilfsmittel)* *2017-2020*

Lösung A3/2017

3.1

	x	y	z	$=$	
(1)	2	−3	1	4	
(2)	−1	1	1	1	$(1)+2\cdot(2)$
(3)	0	2	3	6	

	x	y	z	$=$	
(1)	2	−3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	2	3	6	$(3)+2\cdot(2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	2	−3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	0	9	18	

$9z = 18 \implies \quad z = 2$
$z \longrightarrow (2)$
$-y + 3\cdot 2 = 6 \implies y = 0$
$y; z \longrightarrow (1)$
$2x - 0 + 2 = 4 \implies \quad x = 1$
$\mathbb{L} = \{x|y|z(1;0;2)\}$

3.2 Für die Multiplikation von Matrizen gilt allgemein die Regel:
$\boldsymbol{A}(m;n)\cdot\boldsymbol{B}(n;k) = \boldsymbol{C}(m;k)$
Gegeben $\boldsymbol{A}(2;4)$
Daraus folgt: $\boldsymbol{C}(2;k)$
Da $\boldsymbol{C}$ quadratisch sein muss, ist $k=2$ und damit $\boldsymbol{B}(4;2)$
Die Matrix $\boldsymbol{B}$ hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

3.3 Die Populationsmatrix lautet: $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

Anzahl nach 40 Tagen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen sind 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten vorhanden.

Begründung, weeshab die Population nicht ausstirbt:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach $4 \cdot 40 = 1460$ Tagen wird wieder die Augangspopulation erreicht, da $\boldsymbol{P^4}$ die Einheitsmatrix ist.
Somit kann die Population nicht aussterben.

Lösung A3/2018

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II	2	-1	3	3	II-I$\cdot$ 2
III	0	3	-1	5	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II‛	0	-3	1	-5	
III‛	0	3	-1	5	$\mathrm{II}' + \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II‛	0	-3	1	-5	
III‛‛	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wir wählen eine Variable frei, z.B. $x_3 = t$

$x_3 \to II'$
$-3x_2 + t = -5$
$3x_2 = 5 + t \quad | \quad :3$
$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{t}{3}$
$x_2; x_3 \to (I)$
$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{t}{3} + t = 4$
$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t = 4$
$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ | $+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}$ | $\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$

Lösung A3/2019

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	−2	1	
III	0	1	1	2	III-II

Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	−2	1	
III	0	0	3	1	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$3z=1$

$Z=\frac{1}{3}$

$z\to II$:

$y-2\cdot\frac{1}{3}=1$ | $+\frac{2}{3}$

$y=\frac{5}{3}$

$y\to I$:

$x+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ | $-\frac{5}{3}$

$x=0$

$\mathbb{L}=\left\{x;y;z\middle|0;\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right\}$

3.2.1 Berechnen der Werte für a und b:

$\begin{pmatrix}a & 2\\ b & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 2\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a^2+2b & 2a\\ ab & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Daraus folgt:

$2a=0$ ==> $a=0$

$2b=1$ ==> $b=\frac{1}{2}$

3.2.2 Auflösen der Matrizengleichung $(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{X}$:

Gemäß 3.2.1 ist $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.

$(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ | $\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts

$\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0\\ 0 & 0{,}25\end{pmatrix}$

Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse (o. Hilfsmittel) *2017-2020*

Lösung A3/2020

3.1 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

Format von der Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$: $(3 \text{ x } 7) \cdot (7 \text{ x } 2) = (3 \text{ x } 2)$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das unbekannte Format $(m \text{ x } n)$

Es gilt: $(3 \text{ x } 4) \cdot (3 \text{ x } 2) = (m \text{ x } n)$

Aus den Regeln der Matrixmultiplikation ergibt sich $m = 2$ und $n = 4$.

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das Format $2 \text{ x } 4$.

3.2 $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{R} =$

$\left(\boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}\right) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$(\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E}$

wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist.

3.3 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a \cdot (a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Bedingung:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

$b^2 = 4 \Rightarrow \; b_{1,2} = \pm 2$

$12 = 11 + c$

$c = 1$

$12 = 9 + 2a(a-1) + 3 \cdot 1$

$0 = 2a^2 - 2a$

$2a(a-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

Es gibt folgende vier Lösungen:

$(0; 2; 1)$ oder $(1; 2; 1)$ oder $(0; -2; 1)$ oder $(1; -2; 1)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de