Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse (*o. Hilfsmittel*) *2017-2020*

Lösung A3/2017

3.1

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	-1	1	1	1	$(1)+2\cdot(2)$
(3)	0	2	3	6	

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	2	3	6	$(3)+2\cdot(2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	0	9	18	

$9z = 18 \implies z = 2$
$z \longrightarrow (2)$
$-y + 3\cdot 2 = 6 \implies y = 0$
$y; z \longrightarrow (1)$
$2x - 0 + 2 = 4 \implies x = 1$
$\mathbb{L} = \{x|y|z(1;0;2)\}$

3.2 Für die Multiplikation von Matrizen gilt allgemein die Regel:
$\boldsymbol{A}(m;n)\cdot\boldsymbol{B}(n;k) = \boldsymbol{C}(m;k)$
Gegeben $\boldsymbol{A}(2;4)$
Daraus folgt: $\boldsymbol{C}(2;k)$
Da $\boldsymbol{C}$ quadratisch sein muss, ist $k = 2$ und damit $\boldsymbol{B}(4;2)$
Die Matrix $\boldsymbol{B}$ hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

3.3 Die Populationsmatrix lautet: $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

Anzahl nach 40 Tagen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen sind 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten vorhanden.

Begründung, weeshab die Population nicht ausstirbt:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach $4 \cdot 40 = 1460$ Tagen wird wieder die Augangspopulation erreicht, da $\boldsymbol{P^4}$ die Einheitsmatrix ist.
Somit kann die Population nicht aussterben.

Lösung A3/2018

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II	2	-1	3	3	II-I$\cdot$ 2
III	0	3	-1	5	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II‛	0	-3	1	-5	
III‛	0	3	-1	5	$\mathrm{II}' + \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	1	1	4	
II‛	0	-3	1	-5	
III‛‛	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wir wählen eine Variable frei, z.B. $x_3 = t$

$x_3 \to II'$
$-3x_2 + t = -5$
$3x_2 = 5 + t \quad | \quad :3$
$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{t}{3}$
$x_2; x_3 \to (I)$
$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{t}{3} + t = 4$
$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t = 4$
$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ | $+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}$ | $\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$

Lösung A3/2019

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	1	1	2	III-II

Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	0	3	1	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$3z = 1$

$Z = \frac{1}{3}$

$z \to II$:

$y - 2\cdot\frac{1}{3} = 1$ | $+\frac{2}{3}$

$y = \frac{5}{3}$

$y \to I$:

$x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ | $-\frac{5}{3}$

$x = 0$

$\mathbb{L} = \left\{x; y; z \middle| 0; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

3.2.1 Berechnen der Werte für a und b:

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+2b & 2a \\ ab & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Daraus folgt:

$2a = 0$ ==> $a = 0$

$2b = 1$ ==> $b = \frac{1}{2}$

3.2.2 Auflösen der Matrizengleichung $(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{X}$:

Gemäß 3.2.1 ist $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$.

$(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ | $\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts

$\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X} = \frac{1}{4}\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Lösung A3/2020

3.1 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

Format von der Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$: $(3 \text{ x } 7) \cdot (7 \text{ x } 2) = (3 \text{ x } 2)$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das unbekannte Format $(m \text{ x } n)$

Es gilt: $(3 \text{ x } 4) \cdot (3 \text{ x } 2) = (m \text{ x } n)$

Aus den Regeln der Matrixmultiplikation ergibt sich $m = 2$ und $n = 4$.

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das Format $2 \text{ x } 4$.

3.2 $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{R} =$

$\left(\boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}\right) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$(\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E}$

wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist.

3.3 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a \cdot (a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Bedingung:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

$b^2 = 4 \Rightarrow \; b_{1,2} = \pm 2$

$12 = 11 + c$

$c = 1$

$12 = 9 + 2a(a-1) + 3 \cdot 1$

$0 = 2a^2 - 2a$

$2a(a-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

Es gibt folgende vier Lösungen:

$(0; 2; 1)$ oder $(1; 2; 1)$ oder $(0; -2; 1)$ oder $(1; -2; 1)$