Abituraufgaben BG Matrizen und Prozesse (o. Hilfsmittel) ab 2021

Aufgabe A3.1/2021

3.1.1 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. $\boldsymbol{A}$ hat das Format 2×3. $\boldsymbol{B}$ hat das Format 3×2.
Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:
(1) $3 \cdot \boldsymbol{A} + 2 \cdot \boldsymbol{B}$
(2) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix. (2P)

3.1.2 Für jede Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$.
Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, falls $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix
$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. (2P)

3.1.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{5}}$ orthogonal ist. (3P)

Aufgabe A3.2/2021

3.2.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
(3P)

3.2.2 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nicht kommutativ ist, das heißt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. (2P)

3.2.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{B}$ lässt sich eine Matrix $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:
(1) $\widetilde{\boldsymbol{B}} \neq \boldsymbol{A}$.
(2) Die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ist kommutativ.
Geben Sie eine mögliche Matrix an. ()

Lösung A3.1/2021

3.1.1 (1) Berechnung nicht möglich wegen unterschiedlicher Formate der beiden Matrizen.
(2) Die Berechnung idt möglich, das Format des Ergebnisses ist eine 2×2-Matrix.

3.1.2.1 $\boldsymbol{A} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A^T} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 25+144 & 60-60 \\ 60-60 & 25+144 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die gegebene Matrix ist othogonal.

3.1.2.2 Nachweis der Orthogonalität von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A^5} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A^{T^5}} = \boldsymbol{A^5} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T})^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung A3.2/2021

3.2.1

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	-1	2	0	-3	$(1)+(2)$
(3)	0	1	1	2	

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	1	1	2	$4 \cdot (3) - (2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	0	5	15	

$5z = 15 \Rightarrow z = 3$
$4y - 3 = -7 \Rightarrow y = -1$
$x - 2 - 3 = -4 \Rightarrow x = 1$
$\mathbb{L} = \{x; y; z | 1; -1; 3\}$

3.2.2.1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3 \\ 0+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Damit ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

3.2.2.2 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix}$

Die beiden Produkte stimmen überein für $a = 0$.

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$