Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2017

A1 Analysis

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ an. **2P**

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: **2P**
$g'(3) = 2$
$g''(3) = 0$
$g'''(3) \neq 0$
Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. **3P**

1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0|5) verläuft. **3P**

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = 1$.
Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt: **3P**

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -cos(x+2)$ aus dem Schaubild von p hervorgeht. **2P**

A2 Stochastik

2.1 Ein Experiment gelingt in $50\,\%$ aller Fälle.

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $95\,\%$ mindestens einmal gelingt. **3P**

2.2 A und B sind zwei beliebige Ereignisse.
Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt, beträgt $42\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt $28\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt $18\,\%$.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ **4P**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).
Gegeben sind die Geraden

$$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$$

3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage. **3 P**

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3, die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet. **2 P**

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4, die g_1 rechtwinklig schneidet.
Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene an. **3 P**

A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

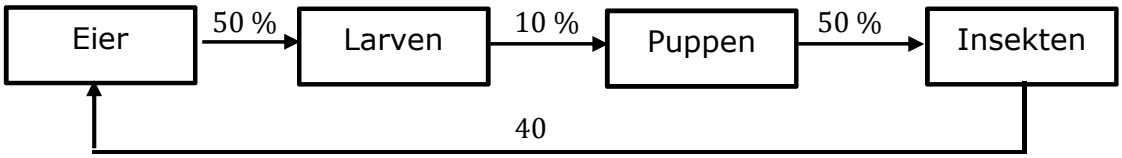
3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 3 \cdot y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6 \end{aligned}$$

3 P

3.2 In der Matrizengleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ hat die Matrix $\boldsymbol{A}$ zwei Zeilen und vier Spalten.
Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix $\boldsymbol{B}$? **2 P**

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert: **3 P**



Aus $50\,\%$ der Eier werden Larven, von dene sich $10\,\%$ verpuppen. Aus $50\,\%$ der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.
Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.
Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Pupen und 300 Insekten.
Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach dem Modell nach 40 Tagen?
Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

A1 Analysis Lösung

1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$3x^3 - 27x = 0$

$x(3x^2 - 27) = 0$

$x_1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$3x^2 - 27 = 0$

$x^2 = 9$

$x_2 = 3; \quad x_3 = -3$

$\mathbb{L} = \{-3; 0; 3\}$

1.2 $g'(3) = 2; g''(3) = 0; \; g'''(3) \neq 0$:

Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt mit der Steigung $m = 2$.

1.3.1 Stellen waagrechter Tangenten mit $h'(x) = 0$:

$h'(x) = 2e^{2x} - 4$

$2e^{2x} - 4 = 0$

$e^{2x} = 2$

$2x = ln(2) \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}ln(2)$

$h\left(\frac{1}{2}ln(2)\right) = e^{2\cdot\frac{1}{2}ln(2)} - 4 \cdot \frac{1}{2}ln(2)$

$h\left(\frac{1}{2}ln(2)\right) = 2 - 2 \cdot ln(2) = 2(1 - ln(2))$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(\frac{1}{2}ln(2)|2(1 - ln(2))$.

1.3.2 $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$

$5 = \frac{1}{2}e^0 - 2 \cdot 0 + C$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$5 = \frac{1}{2} + C \Longrightarrow \; C = 4{,}5$

Die Funktion $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + 4{,}5$ *verläuft durch den Punkt* $P(0|5)$.

1.4.1 Der Integralwert der gegebenen Kosinusfunktion hat im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ den Wert 1. Wegen der Achsensymmetrie der Kosinuskurve muss damit für $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ der Integralwert 2 entstehen.

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktion und einem Integralwert von Null im Intervall von genau einer gesamten Periode, ist somit auch der Integralwert für $a_2 = a_1 - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$ gleich 2.

1.4.2 Das Schaubild der Funktion q geht aus dem Schaubild der Funktion p hervor durch:

1. Spiegelung von an der x-Achse;
2. Verschiebung in x-Richtung um zwei Einheiten nach links.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

A2 Stochastik Lösung

2.1 Bernoulliexperiment mit $B_{4;0,5}(X \geq 1)$.

$B_{4;0,5}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,5}(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^4$

$B_{4;0,5}(X \geq 1) = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375 = 93{,}75\ \%$

*Bei viermaliger Durchführung des Experiments gelingt dieses mindestens einmal **nicht** mit 95 %.*

2.2 Nachweis über Vierfeldertafel (In der Tabelle sind die gegebenen Werte grün und die errechneten Werte rot dargestellt).

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,12	0,18	0,30
$\overline{B}$	0,28	0,42	0,70
$\sum$	0,40	0,60	1,00

Aus der Tabelle ergibt sich, dass $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ und $P(A \cap B) = 0{,}12$ ist.
Somit ist $P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$.

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 Die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 sind kein Vielfaches voneinander, somit Prüfung auf Schnittpunkt oder windschief.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

	r	s	$=$
(1)	4	1	1
(2)	2	1	-6
(3)	0	-4	7

Aus (3) folgt: $-4s = 7$

$s = -\frac{7}{4}$

$s \longrightarrow (2)$

$2r - \frac{7}{4} = -6$

$2r = -\frac{17}{4}$

$r = -\frac{17}{8}$

$r; s \longrightarrow (1)$

$4 \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) - \frac{7}{4} \stackrel{?}{=} 1$

$-10{,}25 \neq 1$

g_1 und g_2 sind windschief.

3.2 Eine Gerade g_3, die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet, verläuft z. Bsp. durch die beiden Aufpunkte von g_1 und g_2.

$$g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.3 Eine Gerade g_4 , die g_1 rechtwinklig schneidet, geht z. B. durch den Aufpunkt von g_1 und einem Richtungsvektor, der orthogonal zum Richtungsvektor von verläuft.

g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $q \in \mathbb{R}$,

denn $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 - 8 = 0$, d. h. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene:
Der Abstand beträgt $2\ LE$.

(Lösungshinweis: Den Abstand erkennen wir am Aufpunkt und dem Richtungsvektor von g_1. Der Richtungsvektor hat in x_3 keine Bewegung, die x_3-Kooridnate des Aufpunktes hat den Absolutwert 2.
Alternativ: Berechnung des Abstandes über die HNF.)

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	-1	1	1	1	$(1) + 2 \cdot (2)$
(3)	0	2	3	6	

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	2	3	6	$(3) + 2 \cdot (2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	2	-3	1	4	
(2)	0	-1	3	6	
(3)	0	0	9	18	

$9z = 18 \implies z = 2$
$z \longrightarrow (2)$
$-y + 3 \cdot 2 = 6 \implies y = 0$
$y; z \longrightarrow (1)$
$2x - 0 + 2 = 4 \implies x = 1$
$\mathbb{L} = \{x|y|z(1; 0; 2)\}$

3.2 Für die Multiplikation von Matrizen gilt allgemein die Regel:
$\boldsymbol{A}(m; n) \cdot \boldsymbol{B}(n; k) = \boldsymbol{C}(m; k)$
Gegeben $\boldsymbol{A}(2; 4)$
Daraus folgt: $\boldsymbol{C}(2; k)$
Da $\boldsymbol{C}$ quadratisch sein muss, ist $k = 2$ und damit $\boldsymbol{B}(4; 2)$
Die Matrix $\boldsymbol{B}$ hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.3 Die Populationsmatrix lautet: $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

Anzahl nach 40 Tagen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen sind 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten vorhanden.

Begründung, weeshab die Population nicht ausstirbt:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0{,}025 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach $4 \cdot 40 = 1460$ Tagen wird wieder die Augangspopulation erreicht, da $\boldsymbol{P}^4$ die Einheitsmatrix ist.
Somit kann die Population nicht aussterben.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de