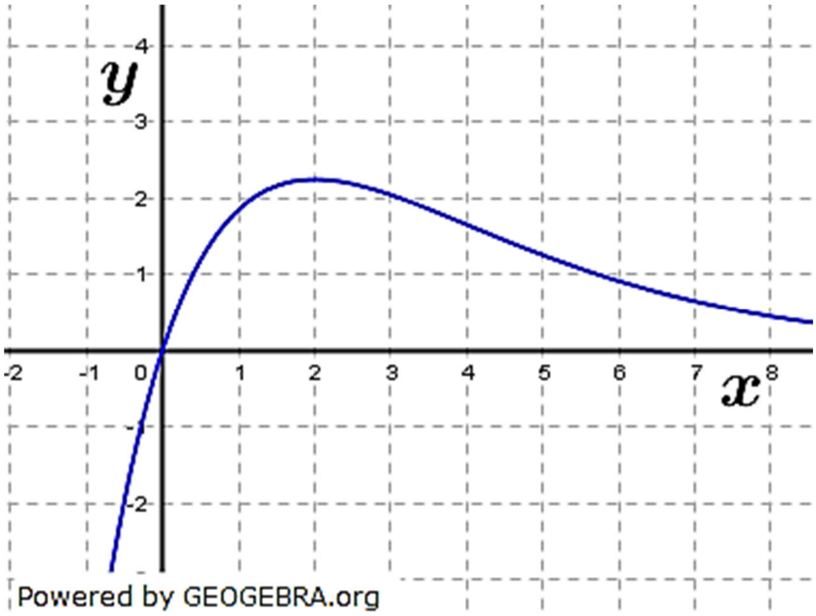
Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2018

## A1 Analysis

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds $K_f$ einer Funktion $f$.




Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$

(2) Die Steigung von $f$ an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von $f$ im Intervall $[0;3]$.

(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion $F$ von $f$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt. **6P**

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung $g'$ für die jeweilige Funktion $g$.

(1) $g(x) = (2x+1)^2$

(2) $g(x) = (x+1) \cdot e^x$ **3P**

1.3 Gegeben ist die Funktion $h$ mit $h(x) = cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von $h$ für $0 \leq x \leq 4$. **3P**

1.3.2 Berechnen Sie : $\int_0^2 h(x)\,dx$. **3P**

## A2 Stochastik

2. In der norwegischen Hauptstadt Oslo ist jeder zehnte Pkw ein Elektroauto.

2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für Pkw fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der Parkplatz von 300 Pkw genutzt.
Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann. **2P**

2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende Pkw betrachtet.

2.2.1 Drei Pkw fahren vorbei.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
$A$: Unter diesen Pkw ist genau ein Elektroauto.
$B$: Unter diesen Pkw ist mindestens ein Elektroauto. **4P**

2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable $X$ und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann:
$P(X \leq 2) = 0{,}9^{100} + 100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}96^{98}$ **2P**

## A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 - \phantom{3}x_3 &= 5 \end{aligned}$$ **3P**

3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelgramm auf.
Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms. **4P**

## A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$ **3P**

3.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ – Matrizen invertierbar.
$\boldsymbol{E}$ ist die Einheitsmatrix.
Lösen Sie die Matrizengleichung

$$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}$$

nach $\boldsymbol{E}$ auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich. **4P**

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2018

## A1 Analysis Lösung

1.1 (1) Die Aussage ist wahr. $K_f$ ist an der Stelle $x = 1$ rechtsgekrümmt.

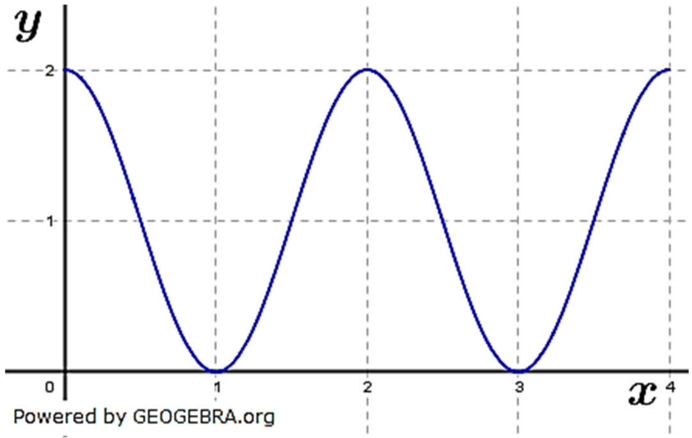
(2) Durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{f(3)-f(0)}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$
$f'(0) \approx 3$ (aus Schaubild abgelesen)
Die Aussage ist falsch.

(3) Die Aussage ist richtig, $f$ hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit VTW von „-„ nach „+".

1.2 (1) $g(x) = (2x + 1)^2$
abgeleitet mit der Kettenregel: $g'(x) = 4(2x + 1)$

(2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$
abgeleitet mit der Produktregel: $g'(x) = e^x + (x + 1) \cdot e^x = e^x \cdot (x + 2)$

1.3.1 $h(x) = cos(\pi \cdot x) + 1$
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
Amplitude $a = 1$, Verschiebung in $y$-Richtung $d = 1$.




1.3.2 $\int_0^2 h(x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi} sin(\pi \cdot x) + x\right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \cdot sin(2\pi) + 2 - \frac{1}{\pi} \cdot sin(0)$
$= 0 + 2 - 0 = 2$

## A2 Stochastik Lösung

2. $p_{Elektro} = 0{,}1;\quad p_{\overline{Elektro}} = 0{,}9$

2.1 $300 \cdot 0{,}9 \cdot 5 = 1350.$
*Man kann pro Tag* $1.350{,}00$ *Kronen erwarten.*

2.2.1 $A$: Unter diesen Pkws ist genau ein Elektroauto.
$B_{3;0,1}(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$
$B$: Unter diesen Pkws ist mindestens ein Elektroauto.
$B_{3;0,1}(X \geq 1) = 1 - B_{3;0,1}(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}9^3 = 0{,}271$

2.2.2 Die Zufallsvariable $X$ gibt die Anzahl der gezählten Elektroautos an.
Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass sich unter $100$ zufällig vorbeifahrenden Autos höchstens zwei Elektroautos befinden.

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2018

# A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1

**Gauß-Schema**

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $=$ | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II | 2 | $-1$ | 3 | 3 | II-I$\cdot 2$ |
| III | 0 | 3 | -1 | 5 | |

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $=$ | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II‵ | 0 | $-3$ | 1 | $-5$ | |
| III‵ | 0 | 3 | $-1$ | 5 | $\mathrm{II}' + \mathrm{III}'$ |

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $=$ | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II‵ | 0 | $-3$ | 1 | $-5$ | |
| III‵‵ | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wir wählen eine Variable frei, z.B. $x_3 = t$

$x_3 \to II'$

$-3x_2 + t = -5$

$3x_2 = 5 + t \qquad | \quad :3$

$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{t}{3}$

$x_2; x_3 \to (I)$

$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{t}{3} + t = 4$

$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t = 4$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Wegen $(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{a} = 0$ stehen die beiden Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ und $\vec{a}$ orthogonal aufeinander.

*Fläche des Parallelogramms:*

$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 36} = 10$

*Die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt $10\, FE$.*

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2018

# A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1

**Gauß-Schema**

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | = | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II | 2 | $-1$ | 3 | 3 | II-I$\cdot$ 2 |
| III | 0 | 3 | -1 | 5 | |

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | = | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II‵ | 0 | $-3$ | 1 | $-5$ | |
| III‵ | 0 | 3 | $-1$ | 5 | $\mathrm{II}' + \mathrm{III}'$ |

| Nr. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | = | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| II‵ | 0 | $-3$ | 1 | $-5$ | |
| III‵‵ | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:
Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Wir wählen eine Variable frei, z.B. $x_3 = t$

$x_3 \to II'$

$-3x_2 + t = -5$

$3x_2 = 5 + t \qquad | \quad :3$

$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{t}{3}$

$x_2; x_3 \to (I)$

$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{t}{3} + t = 4$

$x_1 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t = 4$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2 $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \qquad | \quad +\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} \qquad | \quad \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$