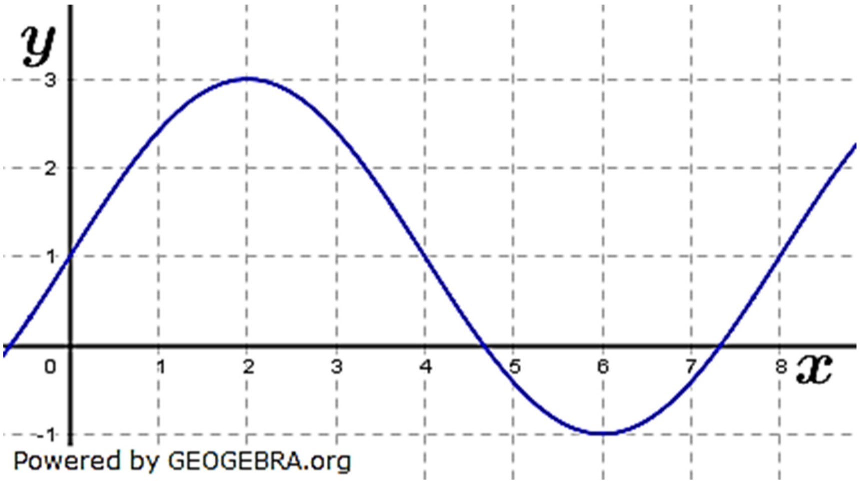
Abituraufgaben Teil 1 BG *(ohne Hilfsmittel)* 2019

Aufgabe A1 Analysis

1.1 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion f.



1.1.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) $f'(1) > 0$

(2) $\int_1^3 f(x)\,dx \geq 6$.

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt $F(4) = F(0)$. (6P)

1.1.2 Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt. (3P)

1.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x};\ \ x \neq 0$. (2P)

1.3 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2} \cdot x\right)^2 dx$. (2P)

1.4 Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für $x > 0$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ (2P)

Aufgabe A2 Stochastik

2. Laut Statistik fahren $70\,\%$ aller Besucher eines Freizeitparks mit der extrem schnellen Super-Achterbahn. Von den Fahrern sind $10\,\%$ über 50 Jahre alt. Die Besucher, die nicht mit dieser Achterbahn fahren, sind zu $80\,\%$ über 50 Jahre alt.

2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und tragen Sie die genannten Wahrscheinlichkeiten ein. (3P)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher des Freizeitparks über 50 Jahre alt ist. (2P)

2.2.1 Geben Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung an, die mithilfe des Terms $0{,}7^{12} + 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{11}$ beantwortet werden kann. (2P)

Aufgabe A3 Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y \quad &= \tfrac{5}{3} \\ y - 2z &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

(3P)

3.2 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_1x_3-Ebene ist.
Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat. (3P)

3.2.2 Berechnen Sie den Abstand, den der Punkt $P(0|0|0)$ zu g hat. (3P)

Aufgabe A3 Matrizen und Prozesse

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y \quad &= \tfrac{5}{3} \\ y - 2z &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

(3P)

3.2 Im Folgenden ist $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und $\boldsymbol{A}$ eine Matrix mit $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

3.2.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, falls $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (3P)

3.2.2 Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach der 2×2-Matrix $\boldsymbol{X}$ auf:
$(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ (3P)

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2019

A1 Analysis Lösung

1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:
$3x^3 - 27x = 0$
$x(3x^2 - 27) = 0$
$x_1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$3x^2 - 27 = 0$
$x^2 = 9$
$x_2 = 3;\quad x_3 = -3$
$\mathbb{L} = \{-3; 0; 3\}$

1.2 $g'(3) = 2; g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$:
Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ einen Wendepunkt mit der Steigung $m = 2$.

1.3.1 Stellen waagrechter Tangenten mit $h'(x) = 0$:
$h'(x) = 2e^{2x} - 4$
$2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
$2x = ln(2) \Longrightarrow\quad x = \frac{1}{2}ln(2)$
$h\left(\frac{1}{2}ln(2)\right) = e^{2\cdot\frac{1}{2}ln(2)} - 4 \cdot \frac{1}{2}ln(2)$
$h\left(\frac{1}{2}ln(2)\right) = 2 - 2 \cdot ln(2) = 2(1 - ln(2))$
Der Punkt hat die Koordinaten $P(\frac{1}{2}ln(2)|2(1 - ln(2))$.

1.3.2 $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$
$5 = \frac{1}{2}e^0 - 2 \cdot 0 + C$ | Punktprobe mit $P(0|5)$
$5 = \frac{1}{2} + C \Longrightarrow\quad C = 4{,}5$
Die Funktion $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + 4{,}5$ *verläuft durch den Punkt* $P(0|5)$.

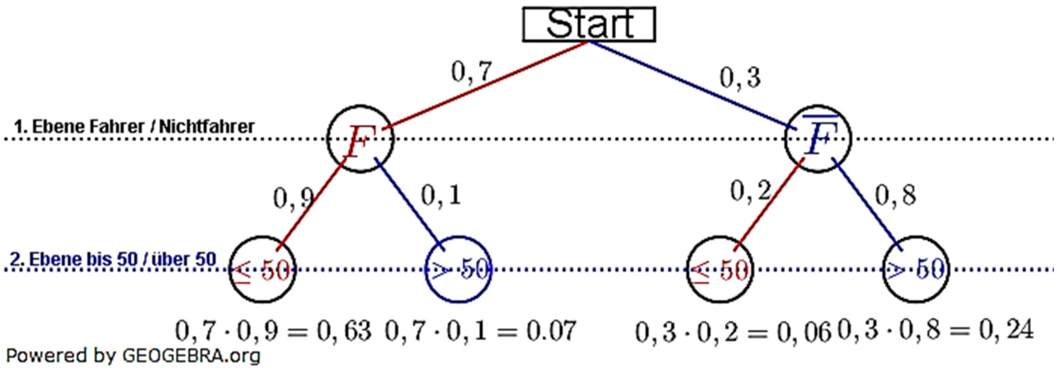
1.4.1 Der Integralwert der gegebenen Kosinusfunktion hat im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ den Wert 1. Wegen der Achsensymmetrie der Kosinuskurve muss damit für $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ der Integralwert 2 entstehen.
Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktion und einem Integralwert von Null im Intervall von genau einer gesamten Periode, ist somit auch der Integralwert für $a_2 = a_1 - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$ gleich 2.

1.4.2 Das Schaubild der Funktion q geht aus dem Schaubild der Funktion p hervor durch:
1. Spiegelung von an der x-Achse;
2. Verschiebung in x-Richtung um zwei Einheiten nach links.

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2019

A2 Stochastik Lösung

2.1 Baumdiagramm:



2.2 Aus dem Baumdiagramm leiten wir her:
A: „Ein Besucher des Freizeitparks ist über Jahre alt."
$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}04 + 0{,}24 = 0{,}31$

2.2.1 *Frage im Sachzusammenhang:*
Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 zufällig ausgewählten Parkbesuchern mindestens 11 Personen mit der Super-Achterbahn fahren?

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	1	1	2	III-II

Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	0	3	1	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$3z = 1$

$Z = \frac{1}{3}$

$z \to II$:

$y - 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad | \quad +\frac{2}{3}$

$y = \frac{5}{3}$

$y \to I$:

$x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \quad | \quad -\frac{5}{3}$

$x = 0$

$\mathbb{L} = \left\{x; y; z \middle| 0; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

3.2.1 $g\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$

Die Gerade g verläuft parallel zur x_1x_3-Ebene, weil die x_2-Komponente des Richtungsvektors gleich 0 ist.

Zweite Gerade parallel zu g mit Abstand 5 von g:

Da g partallel zur x_1x_3-Ebene, muss g löediglich um $5\,LE$ in $x-2$-Richtung entweder nach links oder nach rechts verschoben werden. Der Richtungsvektor wird beibehalten, der Aufpunkt wird entsprechend angepasst:

$h\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$ oder

$h^*\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$

3.2.2 Abstand Punkt $P(0|0|0)$ zu g (über Formel):

$d(P;g)=\frac{|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $\overrightarrow{PP_1}$ als Vektor zwischen P und dem Aufpunkt der Geraden sowie $\overrightarrow{rv_g}$ als Richtungsvektor der Geraden.

$\overrightarrow{PP_1}=\begin{pmatrix}5-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{rv_g}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{rv_g}=\begin{pmatrix}3\\-13\\-2\end{pmatrix}$

$d(P;g)=\frac{\sqrt{9+169+4}}{\sqrt{4+9}}=\sqrt{\frac{182}{13}}=\sqrt{14}$

Der Abstand von g zum Urpsrung beträgt $\sqrt{14}\,LE$.

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	1	1	2	III-II

Nr.	x	y	z	$=$	Operation
I	1	1	0	$\frac{5}{3}$	
II	0	1	-2	1	
III	0	0	3	1	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$3z=1$

$Z=\frac{1}{3}$

$z\rightarrow II\colon\quad y-2\cdot\frac{1}{3}=1\qquad |\quad +\frac{2}{3}$

$y=\frac{5}{3}$

$y\rightarrow I\colon\quad x+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\qquad |\quad -\frac{5}{3}$

$x=0$

$\mathbb{L}=\left\{x;y;z\middle|0;\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right\}$

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2019

3.2.1 Berechnen der Werte für a und b:

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2 + 2b & 2a \\ ab & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Daraus folgt:

$2a = 0 \implies a = 0$

$2b = 1 \implies b = \frac{1}{2}$

3.2.2 Auflösen der Matrizengleichung $(\boldsymbol{A^2} - \boldsymbol{2X})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{2XA}$ nach $\boldsymbol{X}$:

Gemäß 3.2.1 ist $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{E}$.

$(\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{XA}$

$\boldsymbol{EA} - \boldsymbol{2XA} = 2\boldsymbol{XA}$

$\boldsymbol{EA} = 4\boldsymbol{XA} \qquad | \quad \cdot \boldsymbol{A^{-1}}$ von rechts

$\boldsymbol{E} = 4\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{X} = \frac{1}{4}\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$