Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2020

Aufgabe A1 Analysis

1.1 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x;\ x \in \mathbb{R}$ an.
Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

(4P)

1.2 Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einer Polynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K.

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$h(x)$	$2{,}375$	-2	$-1{,}625$	-1	$-1{,}625$	-2	$2{,}375$
$h'(x)$	-18	-2	2	0	-2	2	18
$h''(x)$	48	18	0	-6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.
(1) $P(-1|2)$ liegt auf K.
(2) K besitzt zwei Wendepunkte.
(3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente. (6P)

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right);\ x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Geben Sie zwei benachbarte Wendepunkte des Schaubildes von f an.

(3P)

1.3.2 Ermitteln Sie einen Wert für $b > 10$, für den gilt: $\int_1^b f(x)\,dx = 0$. (2P)

Aufgabe A2 Stochastik

2. Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren unterschiedlicher Größe. Der rote Sektor nimmt die Hälfte des Glücksrads ein, der weiße Sektor ein Drittel und der grüne Sektor den Rest.
Dreht man das Glücksrad, so zeigt beim Stillstand ein Pfeil auf genau einen der drei Sektoren.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
A: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau einmal auf den weißen Sektor. (2P)

2.2 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis B mit der Wahrscheinlichkeit $P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$ an. (2P)

2.3 Bei einem Spiel wird das Glücksrad einmal gedreht. Der Einsatz beträgt 2 Euro.
Zeigt der Pfeil auf den roten Sektor, so erhält man keine Auszahlung.
Zeigt der Pfeil auf den weißen Sektor, so beträgt die Auszahlung 2 Euro.
Zeigt der Pfeil auf den grünen Sektor erhält man den Hauptgewinn.
Bestimmen Sie, wie hoch beim Hauptgewinn die Auszahlung sein muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)

Aufgabe A3 Vektorgeometrie

3. Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|2)$ und $B(-1|-3|4)$ sowie der Punkt $M(0|-2|3)$, der auf der Gerade g durch A nach B liegt.
Die Ebene E ist gegeben durch $E\colon -x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

3.1 Zeigen Sie, dass E den Punkt M enthält und dass E orthogonal zu g ist. (3P)

3.2 Vom Punkt $C(3|1|0)$ ist bekannt, dass er auf g liegt.
Bestimmen Sie den Punkt D auf g (mit $D \neq C$), der von M den gleichen Abstand wie C hat. (2P)

3.3 Begründen Sie, dass für jeden Punkt P von E gilt: $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$. (3P)

Aufgabe A3 Matrizen und Prozesse

3.1 Betrachtet werden die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$.
$\boldsymbol{A}$ hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von $\boldsymbol{A}$ ist 3 x 7.
$\boldsymbol{B}$ hat das Format 7 x 2 und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ hat das Format 3 x 4.

Geben Sie das Format der Matrix $\boldsymbol{C}$ an. (2P)

3.2 Betrachtet wird eine Matrix $\boldsymbol{Q}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^{-1}$.
Vereinfachen Sie den Term $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{R}$ so weit wie möglich. (2P)

3.3 Gegeben sind die Matrizen
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a \cdot (a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Es gilt $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$.
Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c.
Geben Sie die Anzahl der Lösungen in der Form $(a; b; c)$ an. (4P)

A1 Analysis Lösung

1.1 *Nullstellen von p mit $p(x) = x^3 - 100x$:*

$p(x) = 0$

$x^3 - 100x = 0$

$x(x^2 - 100) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

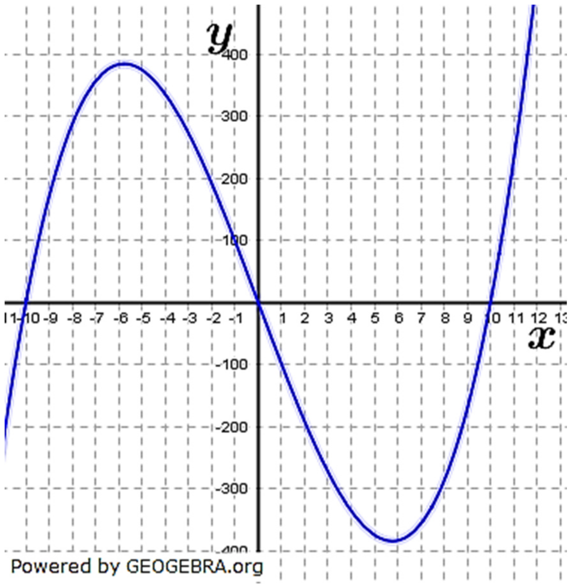
$x_1 = 0$

$x^2 - 100 = 0$

$x_{2,3} = \pm 10$

Der Graph der Funktion hat die Nullstellen $N_1 = (0|0)$, $N_2 = (-10|0)$, $N_3 = (10|0)$.

Skizze des Graphen ohne weitere Rechnung:
Polynomfunktion Grades kommt aus dem III. Quadranten und verläuft in den I. Quadranten. Einzeichnung der errechneten Nullstellen und skizzieren des Graphen – siehe Grafik rechts.



1.2 zu (1):
$P(-1|2)$ liegt nicht auf K, denn $f(-1) = -2$.
Zu (2):
K besitzt zwei Wendepunkte.
Die zweite Ableitung hat zwei Nullstellen mit VZW. Daher hat das Schaubild an diesen Stellen Wendepunkte.
Weitere Wendepunkte existieren nicht, da eine Polynomfunktion 4.Grades maximal 2 Wendepunkte haben kann.
Zu (3):
K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.
$f'(0) = 0$ ist gegebene Stelle mit waagrechter Tangente. Zwischen $f'(-1)$ und $f'(-0{,}5)$ liegt ein Vorzeichenwechsel von f' vor, somit ist im Intervall $-1 < x < -0{,}5$ eine weitere Nullstelle. Gleiches gilt für $f'(0{,}5)$ und $f'(1)$ im Intervall $0{,}5 < x < 1$.

1.3.1 *Benachbarte Wendepunkte:*
Beim unverschobenen Sinus mit $g(x) = si\,n(x) + d$ liegen die Wendepunkte bei $W_K(k \cdot \pi|d)$; $k \in \mathbb{Z}$, benachbart zum Beispiel bei $W_0(0|d)$ und $W_1(\pi|d)$.
Die gegebene Funktion f ist in y-Richtung nicht verschoben, also $d = 0$.
Die gegebene Funktion f hat eine Amplitude von $a = 3$. Die Amplitude hat auf den y-Wert der Wendepunkte keinen Einfluss.

Die gegebene Funktion f hat das Sinusargument $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. Somit muss gelte:

Wendepunkt 1: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

$x = -\frac{\pi}{12}$

Wendepunkt 2: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \pi$

$x = \frac{5}{12}\pi$

Die zwei benachbarten Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1\left(-\frac{\pi}{12}\middle|0\right)$ und $W_2\left(\frac{5}{12}\pi\middle|0\right)$.

1.3.2 Das Integral im Intervall $I = [0; n \cdot p]$; $n \in \mathbb{Z}$ unter einer Sinuskurve ist 0, da die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der x-Achse gleich groß sind.

Die gegebene Funktion f hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Zahl $b = 10$ wird mit 3π überschritten, sodass gilt:

$$\int_1^{3\pi+1} f(x)\,dx = 0.$$

A2 Stochastik Lösung

2.1 Bernoulliexperiment mit $B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1)$.

$$B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

2.2 B: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau zweimal auf den grünen Sektor.

2.3 Aufgabe zum Erwartungswert:
Der (Haupt)-Gewinn bei Sektor grün sei G, der Einsatz ist $2{,}00\,€$.

X_i	$G\,€ - 2{,}00\,€$	$2\,€ - 2\,€$	$-2{,}00\,€$	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	
$X_i \cdot p_i$	$\frac{1}{6}G\,€ - \frac{1}{3}\,€$	$0\,€$	$-1{,}0\,€$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$\frac{1}{6}G\,€ - \frac{1}{3}\,€ - 1{,}0\,€$			

Das Spiel soll fair sein, also $E(X) = 0$

$\frac{1}{6}G\,€ - \frac{1}{3}\,€ - 1{,}0\,€ = 0 \quad | \quad \cdot 6$

$G\,€ - 2{,}0\,€ - 6{,}0\,€ = 0 \quad | \quad +8\,€$

$G = 8\,€$

Der Hauptgewinn muss $8\,€$ sein, damit das Spiel fair ist.

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2020

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 *Nachweis $M \in E$:*

Punktprobe mit $M(0|-2|3)$ in E

$0-(-2)+3 \stackrel{?}{=} 5$

$5=5$

M ist in E.

Nachweis $E \perp g$:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{rv_g}$ ist $E \perp g$.

3.2 *Bestimmung von D:*

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0-3\\-2-1\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $D(-3|-5|6)$

3.3 *Bestimmung über den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$:*

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$$

M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

M ist in E.

Somit ist:

$\left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{PM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MA}\right|^2}$ | Satz des Pythagoras

$\left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{PM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2}$

Da – wie nachgewiesen - $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, folgt daraus $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

Format von der Matrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$: $(3 \text{ x } 7) \cdot (7 \text{ x } 2) = (3 \text{ x } 2)$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das unbekannte Format $(m \text{ x } n)$

Es gilt: $(3 \text{ x } 4) \cdot (3 \text{ x } 2) = (m \text{ x } n)$

Aus den Regeln der Matrixmultiplikation ergibt sich $m=2$ und $n=4$.

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das Format $2 \text{ x } 4$.

3.2 $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{R} =$

$\left(\boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}\right) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$(\boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} =$

$\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{E}$

wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist.

3.3 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\cdot(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9+2a(a-1)+3c & 10+c \end{pmatrix}$

Bedingung:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9+2a(a-1)+3c & 10+c \end{pmatrix}$

$b^2 = 4 \Rightarrow \quad b_{1,2} = \pm 2$

$12 = 11 + c$

$c = 1$

$12 = 9 + 2a(a-1) + 3 \cdot 1$

$0 = 2a^2 - 2a$

$2a(a-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

Es gibt folgende vier Lösungen:

$(0;2;1)$ oder $(1;2;1)$ oder $(0;-2;1)$ oder $(1;-2;1)$