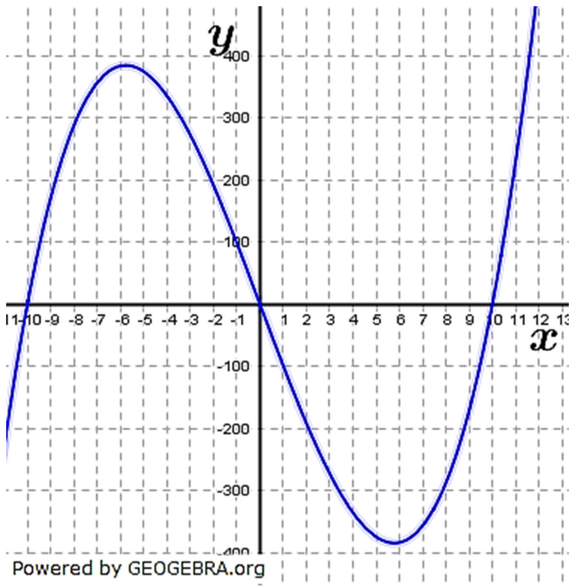
A1 Analysis Lösung

1.1 *Nullstellen von p mit $p(x) = x^3 - 100x$:*

$p(x) = 0$
$x^3 - 100x = 0$
$x(x^2 - 100) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$x^2 - 100 = 0$
$x_{2,3} = \pm 10$

Der Graph der Funktion hat die Nullstellen $N_1 = (0|0)$, $N_2 = (-10|0)$, $N_3 = (10|0)$.

Skizze des Graphen ohne weitere Rechnung:
Polynomfunktion Grades kommt aus dem III. Quadranten und verläuft in den I. Quadranten. Einzeichnung der errechneten Nullstellen und skizzieren des Graphen – siehe Grafik rechts.



1.2 zu (1):
$P(-1|2)$ liegt nicht auf K, denn $f(-1) = -2$.
Zu (2):
K besitzt zwei Wendepunkte.
Die zweite Ableitung hat zwei Nullstellen mit VZW. Daher hat das Schaubild an diesen Stellen Wendepunkte.
Weitere Wendepunkte existieren nicht, da eine Polynomfunktion 4.Grades maximal 2 Wendepunkte haben kann.
Zu (3):
K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.
$f'(0) = 0$ ist gegebene Stelle mit waagrechter Tangente. Zwischen $f'(-1)$ und $f'(-0{,}5)$ liegt ein Vorzeichenwechsel von f' vor, somit ist im Intervall $-1 < x < -0{,}5$ eine weitere Nullstelle. Gleiches gilt für $f'(0{,}5)$ und $f'(1)$ im Intervall $0{,}5 < x < 1$.

1.3.1 *Benachbarte Wendepunkte:*
Beim unverschobenen Sinus mit $g(x) = \sin(x) + d$ liegen die Wendepunkte bei $W_K(k \cdot \pi|d)$; $k \in \mathbb{Z}$, benachbart zum Beispiel bei $W_0(0|d)$ und $W_1(\pi|d)$.
Die gegebene Funktion f ist in y-Richtung nicht verschoben, also $d = 0$.
Die gegebene Funktion f hat eine Amplitude von $a = 3$. Die Amplitude hat auf den y-Wert der Wendepunkte keinen Einfluss.

Die gegebene Funktion f hat das Sinusargument $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)$. Somit muss gelte:

Wendepunkt 1: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$

$x = -\frac{\pi}{12}$

Wendepunkt 2: $2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \pi$

$x = \frac{5}{12}\pi$

Die zwei benachbarten Wendepunkte haben die Koordinaten $W_1\left(-\frac{\pi}{12}\middle|0\right)$ und $W_2\left(\frac{5}{12}\pi\middle|0\right)$.

1.3.2 Das Integral im Intervall $I = [0; n \cdot p]$; $n \in \mathbb{Z}$ unter einer Sinuskurve ist 0, da die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der x-Achse gleich groß sind.

Die gegebene Funktion f hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Zahl $b = 10$ wird mit 3π überschritten, sodass gilt:

$$\int_1^{3\pi+1} f(x)\,dx = 0.$$

A2 Stochastik Lösung

2.1 Bernoulliexperiment mit $B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1)$.

$$B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

2.2 B: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau zweimal auf den grünen Sektor.

2.3 Aufgabe zum Erwartungswert:
Der (Haupt)-Gewinn bei Sektor grün sei G, der Einsatz ist $2{,}00\text{ €}$.

X_i	$G\text{ €} - 2{,}00\text{ €}$	$2\text{ €} - 2\text{ €}$	$-2{,}00\text{ €}$	
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	
$X_i \cdot p_i$	$\frac{1}{6}G\text{ €} - \frac{1}{3}\text{ €}$	0 €	$-1{,}0\text{ €}$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$\frac{1}{6}G\text{ €} - \frac{1}{3}\text{ €} - 1{,}0\text{ €}$			

Das Spiel soll fair sein, also $E(X) = 0$

$\frac{1}{6}G\text{ €} - \frac{1}{3}\text{ €} - 1{,}0\text{ €} = 0 \quad | \cdot 6$

$G\text{ €} - 2{,}0\text{ €} - 6{,}0\text{ €} = 0 \quad | +8\text{ €}$

$G = 8\text{ €}$

Der Hauptgewinn muss 8 € sein, damit das Spiel fair ist.

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 *Nachweis $M \in E$:*
Punktprobe mit $M(0|-2|3)$ in E
$0-(-2)+3 \stackrel{?}{=} 5$
$5=5$
M ist in E.
Nachweis $E \perp g$:

$$g\colon\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r^*\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{rv_g}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{rv_g}$ ist $E \perp g$.

3.2 *Bestimmung von D:*
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+2\cdot\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0-3\\-2-1\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $D(-3|-5|6)$

3.3 *Bestimmung über den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$:*

$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$$

M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
M ist in E.
Somit ist:

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{PM}\right|^2+\left|\overrightarrow{MA}\right|^2} \qquad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{PM}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2}$$

Da – wie nachgewiesen - $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$, folgt daraus $\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|$

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$
Format von der Matrix $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$: $(3 \times 7)\cdot(7 \times 2)=(3 \times 2)$
Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das unbekannte Format $(m \times n)$
Es gilt: $(3 \times 4)\cdot(3 \times 2)=(m \times n)$
Aus den Regeln der Matrixmultiplikation ergibt sich $m=2$ und $n=4$.
Die Matrix $\boldsymbol{C}$ hat das Format 2×4.

3.2 $(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{4}\cdot\boldsymbol{Q})-\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{R}=$
$\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{4}\cdot\boldsymbol{Q})-\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}\right)\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}=$
$(\boldsymbol{4}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}=$
$\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{2}\cdot\boldsymbol{E}$
wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist.

3.3 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a \cdot (a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Bedingung:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

$b^2 = 4 \Rightarrow \quad b_{1,2} = \pm 2$

$12 = 11 + c$

$c = 1$

$12 = 9 + 2a(a-1) + 3 \cdot 1$

$0 = 2a^2 - 2a$

$2a(a-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$a_1 = 0; \quad a_2 = 1$

Es gibt folgende vier Lösungen:

$(0; 2; 1)$ oder $(1; 2; 1)$ oder $(0; -2; 1)$ oder $(1; -2; 1)$