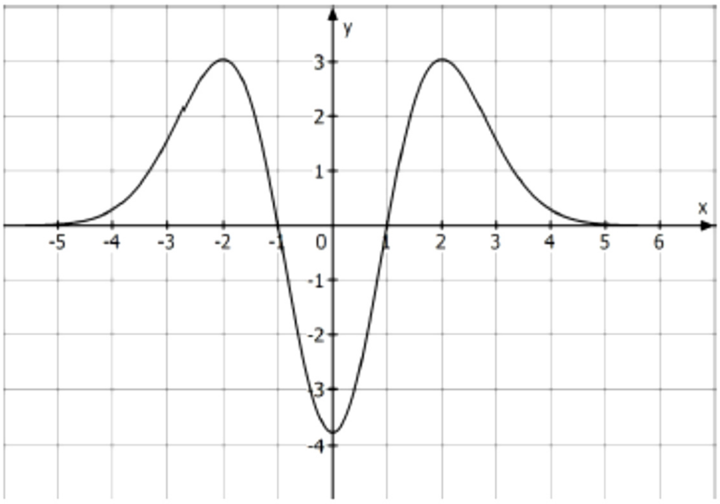
Aufgabe A1 Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. (4P)

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. (2P)

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion s.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0. (5P)

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d.
Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D. (4P)

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A2 Stochastik

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit:
$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an. (2P)

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. (2P)

2.1.3 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert.
Die Mannschaftc gewinnt das erste Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von p. Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2} \cdot p$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Siele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.
Begründen Sie, dass durch Lösung der Gleichung
$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$
die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann. (4 P)

2.2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.
Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.
B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.
C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.
(5 P)

2.2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau $50\,\%$ ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.
(3 P)

Aufgabe A3.1 Vektorgeometrie

3.1 Die Punkte $A(5|1|0)$, B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene und es gilt:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.1.1 Begründen Sie, dass $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben. (3P)

3.1.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck $ABCD$ kein Quadrat sein muss. (2P)

3.1.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D. (2P)

Aufgabe A3.2 Vektorgeometrie

3.2.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 \quad &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$
(3P)

3.2.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind. (2P)

3.2.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat. (2P)

Aufgabe A3.1 Matrizen und Prozesse

3.1.1 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. $\boldsymbol{A}$ hat das Format 2×3. $\boldsymbol{B}$ hat das Format 3×2.
Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:
(1) $3 \cdot \boldsymbol{A} + 2 \cdot \boldsymbol{B}$
(2) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix. (2P)

3.1.2 Für jede Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$.
Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, falls $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix
$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. (2P)

3.1.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal ist. (3P)

Aufgabe A3.2 Matrizen und Prozesse

3.2.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ (3P)

3.2.2 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nicht kommutativ ist, das heißt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. (2P)

3.2.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{B}$ lässt sich eine Matrix $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:
(1) $\widetilde{\boldsymbol{B}} \neq \boldsymbol{A}$.
(2) Die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ist kommutativ.
Geben Sie eine mögliche Matrix an. (2P)

Lösung A1 Analysis

1.1.1 Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2(-x + 3) = 0$

$x_1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

x_1 ist doppelte Nullstelle

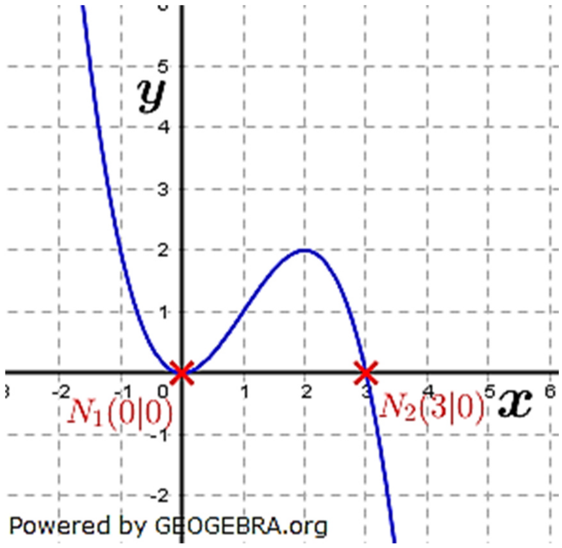
$3 - x = 0$

$x_2 = 3$

$\mathbb{L} = \{3; 0; \}$

Skizze:

Überlegungen zur Skizzierung:
Die beiden Nullstellen sind errechnet, die doppelte Nullstelle führt zu einem Berührpunkt mit der x-Achse.
Durch das Minuszeichen von $-\frac{1}{2}x^3$ kommt der Graph von ∞ und verläuft nach $-\infty$.
Damit ist die doppelte Nullstelle gleichzeitig ein Tiefpunkt, sodass zwischen den beiden Nullstellen noch ein Hochpunkt sein muss.



1.1.2 x-Koordinate des Punktes mit der Steigung $\frac{3}{2}$:

Steigungen berechnen wir mit der ersten Ableitung.

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

$f'(x) = \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}; \cdot -2$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$ | $:3$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$

An der Stelle $x = 1$ hat K_f die Steigung $\frac{3}{2}$.

1.2 (1) $s''(4) < 0$

Die Aussage ist falsch. Der Graph von s ist an der Stelle $x = 4$ linksgekrümmt, somit muss $s''(4) > 0$ sein.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

Die Aussage ist richtig. s hat im Intervall $0 < x < 2$ eine Wendestelle mit positiver Steigung.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

Die Aussage ist richtig. Durch Kästchenzählen stellen wir fest, dass die Fläche unter s im Intervall $0 \leq x \leq 1$ kleiner ist als die Fläche im Intervall $1 \leq x \leq 4$.

1.3. $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.
$d(x) > 0$ für alle $x > 0$

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.
$d'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2x$
$d''(x) = -\frac{6}{x^4} + 2$
$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \qquad | \quad \cdot x^3$
$-2 + 2x^4 = 0$
$x^4 = 1 \qquad | \quad \sqrt[4]{\ }$
$x_{1,2} = \pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $x > 0$ ist nur $x_1 = 1$ eine Lösung.
$d''(1) \neq 0$
$x = 1$ ist damit die einzige Wendestelle von D.

Lösung A2 Stochastik

2.1.1 Bernoulliexperiment mit $B_{10;\frac{2}{3}}(X = 9)$.

A: *Die Mannschaft gewinnt genau* 9 *von* 10 *Spielen.*

2.1.2 A: *Die Mannschaft gewinnt genau* 2 *von* 4 *Spielen, die unmittelbar aufeinander folgen.*

G: *Die Mannschaft gewinnt ein Spiel.*

$\overline{G}$: *Die Mannschaft verliert ein Spiel.*

Ergebnisraum für vier Spiele, von denen zwei gewonnen werden, die direkt aufeinander folgen:

$S = \left(\{GG\overline{GG}\}; \{\overline{G}GG\overline{G}\}; \{\overline{GG}GG\}\right)$

$P\left(GG\overline{GG}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$

Diese Wahrscheinlichkeit kommt dreimal vor, siehe Ergebnisraum.

$P(A) = 3 \cdot \frac{4}{81} = \frac{4}{27}$.

2.1.3 Das Gegenereignis für mindestens ein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen ist kein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen.

A: *Die Mannschaft gewinnt mindestens* 1 *von* 2 *Spielen.*

$\overline{G_1}$: *Die Mannschaft verliert erstes Spiel.*

$\overline{G_2}$: *Die Mannschaft verliert zweites Spiel.*

$P(A) = 1 - P\left(\overline{G_1 G_2}\right)$
$P\left(\overline{G_1}\right) = 1 - P$
$P\left(\overline{G_2}\right) = 1 - \frac{1}{2}p$
$P(A) = 1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$
$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ **q.e.d.**

2.2.1 $P(b)=\frac{4}{9}$; $p(w)=\frac{2}{9}$; $P(g)=\frac{3}{9}$; $P(\overline{w})=\frac{7}{9}$ nur im ersten Zug.

$P(A)=P(ww)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$

$P(B)=1-P(\overline{ww})=1-\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{6}{72}=1-\frac{42}{72}=\frac{30}{72}=\frac{5}{12}$

$P(C)=P(wb;bw)=2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$

2.2.2 Es muss gelten $P(gg)=0{,}5$

$P(gg)=\frac{3+x}{9+x}\cdot\frac{2+x}{8+x}=\frac{1}{2}$

Lösung A3.1 Vektorgeometrie

3.1.1 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$:

$$\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix}=12-12+0=0$$

Wegen $\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BD}=0$ stehen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht aufeinander.

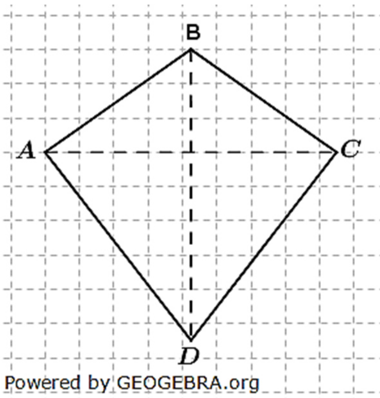
$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$; $\quad|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2^2+2^2+8^2}=\sqrt{72}$

3.1.2 Skizze:

$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ und $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$.

Das Viereck, welches kein Quadrat ist, muss eine Raute sein.



3.1.3 Eckpunkte B und D für Quadrat:

B: $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}$$

D: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$B(3|5|-4)$; $\quad D(1|3|4)$

Lösung A3.2 Vektorgeometrie

3.2.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	-1	2	0	-3	$\text{II}+\text{I}$
III	0	1	1	2	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	0	4	-1	-7	
III	0	1	1	2	$4\cdot\text{III}-\text{II}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	0	4	-1	-7	
III	0	0	5	15	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$5x_3 = 15$

$x_3 = 3;\quad 4x_2 - 3 = -7$

$4x_2 = -4$

$x_2 = -1 \quad x_1 - 2 - 3 = -4$

$x_1 = 1$

$\mathbb{L} = \{x_1; x_2; x_3 | 1; -1; 3\}$

3.2.2.1 $g \parallel h$:

$\overrightarrow{rv_g} = k \cdot \overrightarrow{rv_h}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Prüfung auf Identität:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in h \ \vee \ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in g:$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$2 = 1 + r \;\Rightarrow\; r = 1$

$0 = -1 + 2r \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2}$

g nicht identisch h.

3.2.2.2 Punkt P mit $d(g;P) = d(h;P)$:

Wir halbieren die Strecke zwischen den beiden Aufpunkten.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1{,}5\\-0{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Eine Lösung wäre $P(1{,}5|-0{,}5|,5)$, andere Lösungen denkbar.

Lösung A3.1 Matrizen und Prozesse

3.1.1 (1) Berechnung nicht möglich wegen unterschiedlicher Formate der beiden Matrizen.
(2) Die Berechnung idt möglich, das Format des Ergebnisses ist eine 2×2-Matrix.

3.1.2.1 $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 25+144 & 60-60 \\ 60-60 & 25+144 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die gegebene Matrix ist othogonal.

3.1.2.2 Nachweis der Orthogonalität von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{5}}$:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A}^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}^{5}} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung A3.2 Matrizen und Prozesse

3.2.1

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	-1	2	0	-3	$(1)+(2)$
(3)	0	1	1	2	

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	1	1	2	$4 \cdot (3) - (2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	0	5	15	

$5z = 15 \rightarrow z = 3$
$4y - 3 = -7 \rightarrow y = -1$
$x - 2 - 3 = -4 \rightarrow x = 1$
$\mathbb{L} = \{x; y; z | 1; -1; 3\}$

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2021

3.2.2.1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3 \\ 0+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Damit ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

3.2.2.2 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix}$

Die beiden Produkte stimmen überein für $a = 0$.

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$