Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2021

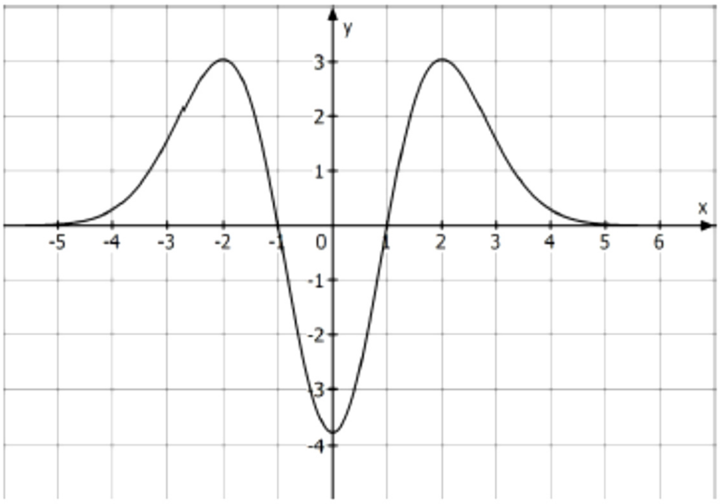
Aufgabe A1 Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. (4P)

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. (2P)

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion s.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.
(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.
(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0. (5P)

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d.
Zeigen Sie:
(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.
(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D. (4P)

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A2 Stochastik

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit:
$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an. (2P)

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. (2P)

2.1.3 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert.
Die Mannschaftc gewinnt das erste Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von p. Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2} \cdot p$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Siele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.
Begründen Sie, dass durch Lösung der Gleichung
$1 - (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$
die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann. (4 P)

2.2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.
Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.
B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.
C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.
(5 P)

2.2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau $50\,\%$ ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.
(3 P)

Aufgabe A3.1 Vektorgeometrie

3.1 Die Punkte $A(5|1|0)$, B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene und es gilt:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.1.1 Begründen Sie, dass $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben. (3P)

3.1.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck $ABCD$ kein Quadrat sein muss. (2P)

3.1.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D. (2P)

Aufgabe A3.2 Vektorgeometrie

3.2.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(3P)

3.2.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind. (2P)

3.2.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat. (2P)

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A3.1 Matrizen und Prozesse

3.1.1 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. $\boldsymbol{A}$ hat das Format 2×3. $\boldsymbol{B}$ hat das Format 3×2.
Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:
(1) $3 \cdot \boldsymbol{A} + 2 \cdot \boldsymbol{B}$
(2) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix. (2P)

3.1.2 Für jede Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$.
Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, falls $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix
$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. (2P)

3.1.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal ist. (3P)

Aufgabe A3.2 Matrizen und Prozesse

3.2.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
(3P)

3.2.2 Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nicht kommutativ ist, das heißt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. (2P)

3.2.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix $\boldsymbol{B}$ lässt sich eine Matrix $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:
(1) $\widetilde{\boldsymbol{B}} \neq \boldsymbol{A}$.
(2) Die Matrizenmultiplikation von $\boldsymbol{A}$ und $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ist kommutativ.
Geben Sie eine mögliche Matrix an. (2P)