Lösung A1 Analysis

1.1.1 Nullstellen mit $f(x)=0$:

$-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2=0$

$\frac{1}{2}x^2(-x+3)=0$

$x_1=0$ | Satz vom Nullprodukt

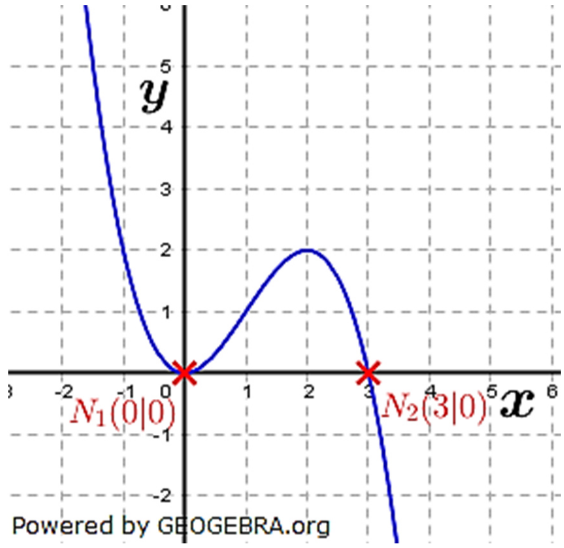
x_1 ist doppelte Nullstelle

$3-x=0$

$x_2=3$

$\mathbb{L}=\{3;0;\}$

Skizze:



Überlegungen zur Skizzierung:
Die beiden Nullstellen sind errechnet, die doppelte Nullstelle führt zu einem Berührpunkt mit der x-Achse.
Durch das Minuszeichen von $-\frac{1}{2}x^3$ kommt der Graph von ∞ und verläuft nach $-\infty$.
Damit ist die doppelte Nullstelle gleichzeitig ein Tiefpunkt, sodass zwischen den beiden Nullstellen noch ein Hochpunkt sein muss.

1.1.2 x-Koordinate des Punktes mit der Steigung $\frac{3}{2}$:
Steigungen berechnen wir mit der ersten Ableitung.

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x$

$f'(x)=\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}x^2+3x=\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2};\ \cdot -2$

$3x^2-6x+3=0$ | $:3$

$x^2-2x+1=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-1}=1$

An der Stelle $x=1$ hat K_f die Steigung $\frac{3}{2}$.

1.2 (1) $s''(4)<0$
Die Aussage ist falsch. Der Graph von s ist an der Stelle $x=4$ linksgekrümmt, somit muss $s''(4)>0$ sein.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0<x<2$ einen Hochpunkt.
Die Aussage ist richtig. s hat im Intervall $0<x<2$ eine Wendestelle mit positiver Steigung.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.
Die Aussage ist richtig. Durch Kästchenzählen stellen wir fest, dass die Fläche unter s im Intervall $0\le x\le 1$ kleiner ist als die Fläche im Intervall $1\le x\le 4$.

1.3. $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.
$d(x) > 0$ für alle $x > 0$

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.
$d'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2x$
$d''(x) = -\frac{6}{x^4} + 2$
$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \qquad | \quad \cdot x^3$
$-2 + 2x^4 = 0$
$x^4 = 1 \qquad | \quad \sqrt[4]{}$
$x_{1,2} = \pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $x > 0$ ist nur $x_1 = 1$ eine Lösung.
$d''(1) \neq 0$
$x = 1$ ist damit die einzige Wendestelle von D.

Lösung A2 Stochastik

2.1.1 Bernoulliexperiment mit $B_{10;\frac{2}{3}}(X = 9)$.

A: Die Mannschaft gewinnt genau 9 von 10 Spielen.

2.1.2 *A: Die Mannschaft gewinnt genau 2 von 4 Spielen, die unmittelbar aufeinander folgen.*
G: Die Mannschaft gewinnt ein Spiel.
$\overline{G}$: Die Mannschaft verliert ein Spiel.
Ergebnisraum für vier Spiele, von denen zwei gewonnen werden, die direkt aufeinander folgen:
$S = \left(\{GG\overline{G}\,\overline{G}\}; \{\overline{G}GG\overline{G}\}; \{\overline{G}\,\overline{G}GG\}\right)$
$P\left(GG\overline{G}\,\overline{G}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$
Diese Wahrscheinlichkeit kommt dreimal vor, siehe Ergebnisraum.
$P(A) = 3 \cdot \frac{4}{81} = \frac{4}{27}$.

2.1.3 Das Gegenereignis für mindestens ein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen ist kein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen.
A: Die Mannschaft gewinnt mindestens 1 von 2 Spielen.
$\overline{G_1}$: Die Mannschaft verliert erstes Spiel.
$\overline{G_2}$: Die Mannschaft verliert zweites Spiel.
$P(A) = 1 - P\left(\overline{G_1}\,\overline{G_2}\right)$
$P\left(\overline{G_1}\right) = 1 - P$
$P\left(\overline{G_2}\right) = 1 - \frac{1}{2}p$
$P(A) = 1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$
$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ **q.e.d.**

2.2.1 $P(b) = \frac{4}{9};\ \ p(w) = \frac{2}{9};\ \ P(g) = \frac{3}{9};\ \ P(\overline{w}) = \frac{7}{9}$ nur im ersten Zug.

$P(A) = P(ww) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$

$P(B) = 1 - P(\overline{ww}) = 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{6}{72} = 1 - \frac{42}{72} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

$P(C) = P(wb; bw) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

2.2.2 Es muss gelten $P(gg) = 0{,}5$

$P(gg) = \frac{3+x}{9+x} \cdot \frac{2+x}{8+x} = \frac{1}{2}$

Lösung A3.1 Vektorgeometrie

3.1.1 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 12 - 12 + 0 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ stehen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht aufeinander.

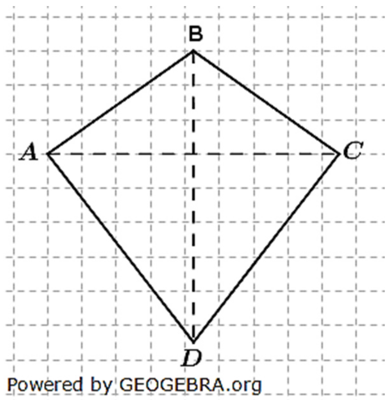
$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72};\qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{72}$

3.1.2 Skizze:

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ und $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$.

Das Viereck, welches kein Quadrat ist, muss eine Raute sein.



3.1.3 Eckpunkte B und D für Quadrat:

B: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$B(3|5|-4);\quad D(1|3|4)$

Lösung A3.2 Vektorgeometrie

3.2.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	-1	2	0	-3	$\mathrm{II}+\mathrm{I}$
III	0	1	1	2	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	0	4	-1	-7	
III	0	1	1	2	$4\cdot\mathrm{III}-\mathrm{II}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	-1	-4	
II	0	4	-1	-7	
III	0	0	5	15	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$5x_3 = 15$

$x_3 = 3;\quad 4x_2 - 3 = -7$

$4x_2 = -4$

$x_2 = -1\quad x_1 - 2 - 3 = -4$

$x_1 = 1$

$\mathbb{L} = \{x_1; x_2; x_3 | 1; -1; 3\}$

3.2.2.1 $g \parallel h$:

$\overrightarrow{rv_g} = k \cdot \overrightarrow{rv_h}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Prüfung auf Identität:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in h \vee \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in g:$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$2 = 1 + r \Rightarrow r = 1$

$0 = -1 + 2r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

g nicht identisch h.

3.2.2.2 Punkt P mit $d(g;P) = d(h;P)$:

Wir halbieren die Strecke zwischen den beiden Aufpunkten.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}1{,}5\\-0{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Eine Lösung wäre $P(1{,}5|-0{,}5|,5)$, andere Lösungen denkbar.

Lösung A3.1 Matrizen und Prozesse

3.1.1 (1) Berechnung nicht möglich wegen unterschiedlicher Formate der beiden Matrizen.
(2) Die Berechnung idt möglich, das Format des Ergebnisses ist eine 2×2-Matrix.

3.1.2.1 $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A^T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 25+144 & 60-60 \\ 60-60 & 25+144 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die gegebene Matrix ist othogonal.

3.1.2.2 Nachweis der Orthogonalität von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{5}}$:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A^5} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A^{T^5}} = \boldsymbol{A^5} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T})^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung A3.2 Matrizen und Prozesse

3.2.1

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	-1	2	0	-3	$(1)+(2)$
(3)	0	1	1	2	

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	1	1	2	$4 \cdot (3) - (2)$

	x	y	z	$=$	
(1)	1	2	-1	-4	
(2)	0	4	-1	-7	
(3)	0	0	5	15	

$5z = 15 \rightarrow z = 3$
$4y - 3 = -7 \rightarrow y = -1$
$x - 2 - 3 = -4 \rightarrow x = 1$
$\mathbb{L} = \{x; y; z | 1; -1; 3\}$

3.2.2.1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3 \\ 0+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Damit ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

3.2.2.2 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-6 & 0-3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix}$

Die beiden Produkte stimmen überein für $a = 0$.

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$