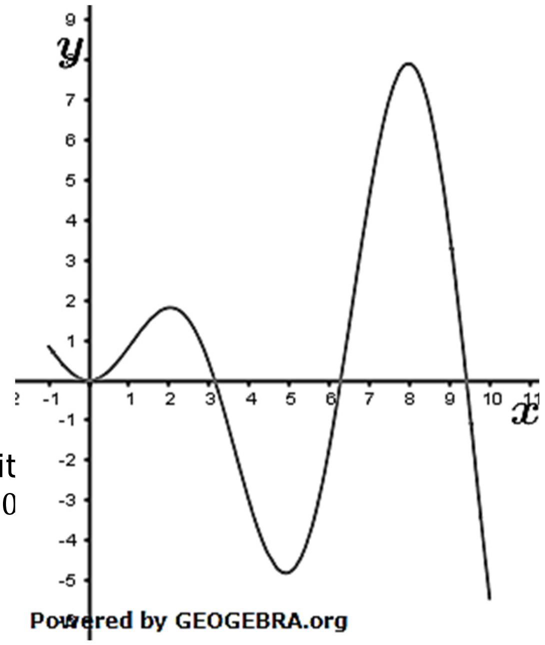
Aufgabe A1/2022 Analysis

1.1 Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$.
Ordnen Sie die Werte $f(0)$, $f'(1)$ und $\int_0^1 f(x)\,dx$ nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge. (4P)

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x \cdot \sin(x)$; $-1 \le x \le 10$.
Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g von g.



1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.
Geben Sie die Anzahl der Berührpunkte an. (3P)

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$; $-1 \le x \le 10$ eine Stammfunktion von g ist.
Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0|7)$ enthält. (3P)

1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:
- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0|1)$ unter einem rechten Winkel
- Die $x-$ und die $y-$Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein. (5P)

Aufgabe A2-1/2022 Stochastik

2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.

2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.

2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperiment vollständig beschreibt. (2P)

2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft. (2P)

2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie:

(1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl" größer als $\frac{1}{8}$.

(2) Es gibt eine Anzahl von Würfen für die Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau dreimal Zahl" ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal Zahl".

(4P)

Aufgabe A2-2/2022 Stochastik

2 Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild „Bube", zwei das Bild „Dame" und zwei das Bild „König". Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.
E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.
$E3_1$: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimaleinen König gezogen. (5P)

2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.
Der Spieler enthält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)

Aufgabe A3.1/2022 Vektorgeometrie

3 Für ein Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D gilt:
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3.1 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{DA}$.
Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Rechteck ist. (3P)

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, sodass sich die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ in $(3{,}5|4|1{,}5)$ schneiden. (2P)

3.3 Durch Streckung des Vierecks $ABCD$ wird dessen Flächeninhalt um den Faktor 5 vergrößert. Die Seitenverhältnisse bleiben dabei unverändert. Berechnen Sie eine Seitenlänge des entstehenden, vergrößerten Vierecks. (2P)

Aufgabe A3.2/2022 Vektorgeometrie

3 Die Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $A(2|4|5)$.

3.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist, aber nicht in dieser Ebene liegt. (2P)

3.2 Bestimmen Sie einen Punkt P auf g, sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $AP:BP$ ist. (2P)

3.3 $C(4|2|1{,}5)$ ist ein weiterer Punkt und $M(2|1|3{,}5)$ ein Punkt auf g.
Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Abstand von C zur Geraden g. (3P)

Aufgabe A3.1/2022 Matrizen und Prozesse

3 Die Matrix $\boldsymbol{S}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{E}$ bezeichnet die Einheitsmatrix vom Format $2 \, x \, 2$.

3.1 Im Folgenden ist $\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq \vec{o}$ ein Vektor, sodass $\boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt.

3.1.1 Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\boldsymbol{S}^4 + \boldsymbol{S}^3 + \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{x}$ so weit wie möglich. (2P)

3.1.2 Bestimmen Sie einen solchen Vektor $\vec{x}$ (2P)

3.2 Eine quadratische Matrix heißt *stochastische Matrix*, falls alle ihre Elemente nicht negativ sind und für jede Spalte die Summe der Elemente den Wert 1 hat.
Somit ist $\boldsymbol{S}$ eine stochastische Matrix.
Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Ist $\boldsymbol{M}$ eine beliebige stochastische Matrix vom Format $2 \, x \, 2$, so ist $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}$ eine stochastische Matrix.“ (3P)

Aufgabe A3.2/2022 Matrizen und Prozesse

3 Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Berechnen Sie die Inverse von $\boldsymbol{A}$. (2P)

3.2 Begründen Sie, dass die Gleichung $\boldsymbol{B} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{y}$ für jede Wahl von

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt. (2P)

3.3 Untersuchen Sie, ob für die Matrizengleichung
$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$
gilt, ohne eine der vier Matrizen $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ dabei zu berechnen.

Lösung A1/2022 Analysis

1.1 $f(x) = 2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2 \cdot e^x$

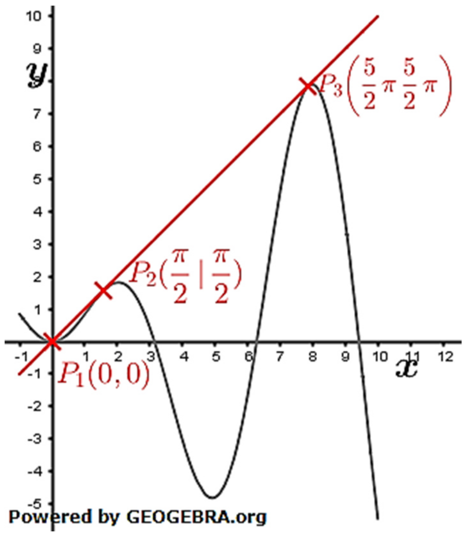
$f(0) = 2;\ f'(1) = 2e$

$\int_0^1 2e^x\,dx = [2e^x\}_0^1 = 2e - 2$

Geordnete Werte: $2; 2e - 2; 2e$

1.2.1 $g(x) = x \cdot sin(x)\,;\ -1 \leq x \leq 10.$

Gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.



Gemeinsame Punkte durch Gleichsetzung:

$x \cdot sin(x) = x$

$x \cdot sin(x) - x = 0$

$x(sin(x) - 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$x_1 = 0$

$sin(x) - 1 = 0$

$sin(x) = 1$

$x_2 = \frac{\pi}{2};\ \ x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$

Berührpunkte müssen gleich Steigung haben.

$g'(0) = 0$ ➔ kein Berührpunkt

$g(x) = x \cdot sin(x)$

$g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$g'\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$

Die Steigung von $y = x$ ist ebenfalls 1. Die Punkte $P_2\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right)$ und ist $P_3\left(\frac{5}{2}\pi\middle|\frac{5}{2}\pi\right)$ sind Berührpunkte.

1.2.2 $G(x) = -x\cos(x) + sin(x)\,;\ -1 \leq x \leq 10$

Wir bilden $G'(x)$:

$G'(x) = -\cos(x) + x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x)$ **q.e.d.**

Stammfunktion von g durch $P(0|7)$ enthält.

$G(x) = -x\cos(x) + sin(x) + C$

$7 = -0 \cdot cos(0) + sin(0) + C$ | Punktprobe mit $P(0|7)$

$C = 7$

$G(x) = -x\cos(x) + sin(x) + 7$

1.3 Allgemeine Form einer quadratische Funktion:
$p(x) = ax^2 + bx + c$
Wir benötigen 3 Bedingungen zum Lösen der Koeffizienten a, b und c.

(I) $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ ➔ $c = 1$ | Punktprobe mit $(0|1)$

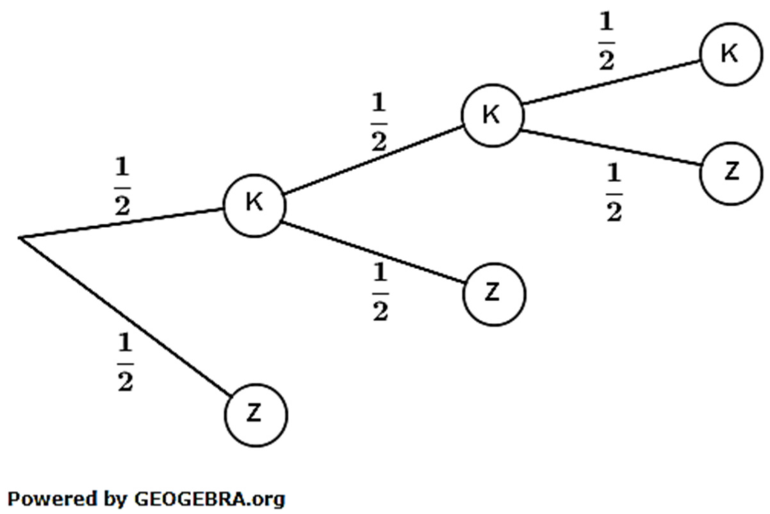
(II) $p'(0) = -4$ | Orthogonalitätsbedingung
$p'(x) = 2ax + b$
$-4 = 2 \cdot 0 + b$
$b = -4$

(II) $p(x) = p'(x) = 0$
$2ax - 4 = 0$
$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$
$\frac{2}{a} = a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 1$ | $\cdot a$
$2 = 4 - 8 + a$
$a = 6$

$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$

Lösung A2-1/2022 Stochastik

2.1.1 Baumdiagramm



2.1.2 Durchschnittliche Anzahl Würfe.
Sei X die Anzahl der Würfe mit dem Ereignisraums
$\Omega = \{Z; KZ; KKZ, KKK\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten
$\mathrm{P(Z)} = \frac{1}{2};\quad P(KZ) = \frac{1}{4};\ P(KKZ) = \frac{1}{8}$ und $P(KKK) = \frac{1}{8}$
Damit ergibt sich der Erwartungswert
$\mathrm{E(X)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$
Die durchschnittliche Anzahl der Würfe beträgt $1{,}75$.

2.2 (1) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$ für Zahl und $k = 1$.
$B_{n;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} > \frac{1}{8}$
Die Aussage ist korrekt.
(2) Wegen der identischen Wahrscheinlichkeit $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$ für Kopf und Zahl sind die Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zum Mittelwert.
Zwischen 3 und 4 liegt die Zahl $2{,}5$. Somit gilt diese Aussage für 5 Würfe.

<u>Aufgabe A2-2/2022 Stochastik</u>

2.1 E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.
$P(E_1) = P(BDK, BKD, DBK; DKB, KBD; KDB)6 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.
$P(E_2) = P\left(B\overline{B}\overline{B}, \overline{B}B\overline{B}, \overline{B}\overline{B}B\right) = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimal einen König gezogen.
A: Mindestens einmal einen Buben gezogen
B: Mindestens zweimal einen König gezogen
$P(A) = 1 - P\left(\{\overline{BBB}\}\right) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{19}{27}$
$P(B) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; KKK\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{7}{27}$
Nach dem Additionssatz gilt:
$P(E_3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(KKB; KBK; BKK) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$
$P(E_3) = \frac{19}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{9} = \frac{23}{27}$

2.2 Aufgabe zum Erwartungswert

A: Zweimal das gleiche Bild

B: Dreimal das gleiche Bild

C: Alle anderen Kombinationen

$P(A) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; BB\overline{B}, B\overline{B}B, \overline{B}BB; DD\overline{D}, D\overline{D}D, \overline{D}DD\right)$

$P(A) = 3 \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(KKK, BBB, DDD) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Auszahlungen:

$P(A) = x;\; P(B) = 18;\; P(C) = 0$

$E(X) = x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9}$

Wegen fairem Spiel muss $E(X) = 0$ sein, also

$x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} = 5$

$\frac{2}{3}x = 3$

$x = 4{,}5$

Die Auszahlung für Zweimal das gleiche Bild muss $4{,}50\text{ €}$ betragen, damit das Spiel fair ist.

Lösung A3.1/2022 Vektorgeometrie

3 Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$

3.1 $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DA} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nachweis, das Viereck ein Rechteck ist:

Es muss gelten $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \wedge \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3;\quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3;$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$

Die genannten Bedingungen sind erfüllt, das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.

3.2 Koordinaten des Punktes A, für Schnittpunkt Diagonalen gleich $M(3{,}5|4|1{,}5)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $A(2|3|2)$.

3.3 Streckung des Vierecks $ABCD$ mit Vergrößerung der Fläche mit dem Faktor 5:

Bei Vergrößerung einer Fläche ändern sich die Seitenlängen mit dem Faktor der Wurzel der Flächenvergrößerung.

Beispiel Strecke $\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$

Vergrößerung der Strecke mit Faktor $\sqrt{5}$ ergibt:

$\overline{BC}^* = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

<u>Lösung A3.2/2022</u>

3 Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $B(2|4|5)$.

3.1 Begründung, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist:

Geradengleichung aufstellen:

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alle Koordinaten von g haben als x_1-Koordinate die Konstante 2. Die Gerade verläuft parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene. Da die x_1-Koordinate nicht Null ist, verläuft die Gerade g nicht in der x_2x_3-Koordinatenebene.

3.2 Punkt P auf g, sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{AP}:\overline{BP}$ ist:

Die Strecke $\overline{AB}$ wird damit in 3 gleiche Teile geteilt. Damit ist:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(2|2|4)$.

3.3 Nachweis, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind mit $C(4|2|1{,}5)$ und $M(2|1|3{,}5)$ auf g.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 1{,}5-3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$

Abstand von C zur Geraden g:

Da $M \in g \wedge \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$ ist $|\overrightarrow{MC}|$ Abstand des Punktes C von g.

$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Der Abstand des Punktes C von g beträgt $3\ LE$.

Lösung A3.1/2022 Matrizen und Prozesse

3 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.1 *Vereinfachung des Ausdruck $(\boldsymbol{S}^4 + \boldsymbol{S}^3 + \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{x}$:*

Es gilt $\boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^2 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^3 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{E} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^3 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^2 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} - \boldsymbol{E} \cdot \vec{x} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} - \vec{x} = 3\vec{x}$.

3.1.2 *Bestimmung eines Vektors $\vec{x}$:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_1$ ➔ $-\frac{3}{4}x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

$\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_2$ ➔ $\frac{3}{4}x_1 = \frac{1}{2}x_2$

Die Addition der beiden Gleichungen führt zu $0 = 0$
Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.
Laut Aufgabenstellung ist nur eine Lösung gefragt.
Wir wählen x_1 frei mit z. B. $x_1 = \frac{4}{3}$ und erhalten dadurch $x_2 = 2$. $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2 *Beurteilung der Aussage:*
„Ist $\boldsymbol{M}$ eine beliebige stochastische Matrix vom Format $2\,x\,2$, so ist $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}$ eine stochastische Matrix.“

$\boldsymbol{M}$ sei eine stochastische Matrix.

Es gilt $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$

wobei $0 \leq a \leq 1$ und $0 \leq b \leq 1$ gelten muss, damit alle Elemente der Matrix nicht negativ sind.

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a & \frac{1}{4}b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b \\ \frac{3}{4}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a & \frac{3}{4}b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Kontrolle, ob $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ eine stochastische Matrix ist:

1) Die Summe der Spalten ergibt jeweils 1.
2) Da $0\leq a\leq 1$ und $0\leq b\leq 1$ ist, sind alle Elemente der Matrix $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ nicht negativ, damit ist auch diese Bedingung erfüllt.

$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ ist eine stochastische Matrix.

Lösung A3.2/2022 Matrizen und Prozesse

3 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&7&6\\4&2&1\\4&2&1\end{pmatrix}$

3.1 *Inverse von $\boldsymbol{A}$.*

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&3&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longleftarrow -3\cdot III+I$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&0&1&0&-3\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longleftarrow II-I$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-4&0&0&-1&1&3\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\longleftarrow :-4\\ \longleftarrow :2\\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Begründung, dass $\boldsymbol{B} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{y}$ für jede Wahl von $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt.

$\boldsymbol{B} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{y} \qquad | \quad \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$ von links

$\vec{x} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{y}$

Wegen $Det(\boldsymbol{B}) = 0$ existiert keine $\boldsymbol{B}^{-1}$, die Gleichung ist für jeden Vektor $\vec{y}$ unlösbar.

3.3 Untersuchung der Matrizengleichung $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$**:**

Wir multiplizieren aus:

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2$

Diese Gleichung gilt nur, wenn $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ist.

Wir prüfen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Wir prüfen $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Und sehen bereits in der 1. Zeile, 1. Spalte, dass das nicht stimmt. Somit ist $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$