

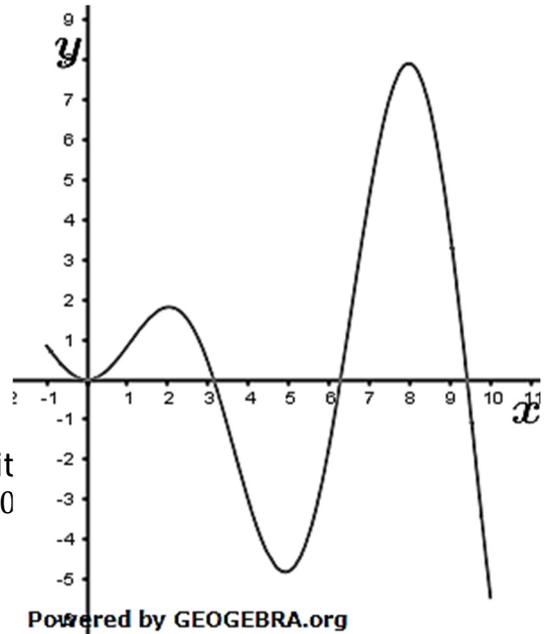


Aufgabe A1/2022 Analysis

1.1 Die in \mathbb{R} definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$.

Ordnen Sie die Werte $f(0)$, $f'(1)$ und $\int_0^1 f(x) dx$ nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge. (4P)

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x \cdot \sin(x)$; $-1 \leq x \leq 10$. Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g von g .



1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Geben Sie die Anzahl der Berührungspunkte an. (3P)

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -x \cos(x) + \sin(x)$; $-1 \leq x \leq 10$ eine Stammfunktion von g ist. Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0|7)$ enthält. (3P)

1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0|1)$ unter einem rechten Winkel
- Die x - und die y -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein. (5P)

Aufgabe A2-1/2022 Stochastik

- 2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.
- 2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.
- 2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperiment vollständig beschreibt. (2P)
- 2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft. (2P)
- 2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie:
- (1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl“ größer als $\frac{1}{8}$.
- (2) Es gibt eine Anzahl von Würfeln für die Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau dreimal Zahl“ ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal Zahl“.
- (4P)

Aufgabe A2-2/2022 Stochastik

- 2 Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild „Bube“, zwei das Bild „Dame“ und zwei das Bild „König“. Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
- Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.
- 2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
 E_1 : Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.
 E_2 : Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.
 E_{3_1} : Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimaleinen König gezogen. (5P)
- 2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.
Der Spieler erhält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)

Aufgabe A3.1/2022 Vektorgeometrie

- 3 Für ein Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D gilt:
 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$
- 3.1 Bestimmen Sie den Vektor \vec{DA} .
Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Rechteck ist. (3P)
- 3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A , sodass sich die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ in $(3,5|4|1,5)$ schneiden. (2P)
- 3.3 Durch Streckung des Vierecks $ABCD$ wird dessen Flächeninhalt um den Faktor 5 vergrößert. Die Seitenverhältnisse bleiben dabei unverändert. Berechnen Sie eine Seitenlänge des entstehenden, vergrößerten Vierecks. (2P)

Aufgabe A3.2/2022 Vektorgeometrie

- 3 Die Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $A(2|4|5)$.
- 3.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_2x_3 -Koordinatenebene ist, aber nicht in dieser Ebene liegt. (2P)
- 3.2 Bestimmen Sie einen Punkt P auf g , sodass 2:1 das Verhältnis der Streckenlängen $AP:BP$ ist. (2P)
- 3.3 $C(4|2|1,5)$ ist ein weiterer Punkt und $M(2|1|3,5)$ ein Punkt auf g .
Weisen Sie nach, dass die Vektoren \vec{AB} und \vec{MC} zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Abstand von C zur Geraden g . (3P)

Aufgabe A3.1/2022 Matrizen und Prozesse

3 Die Matrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E bezeichnet die Einheitsmatrix vom Format 2×2 .

3.1 Im Folgenden ist \vec{x} mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, sodass $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt.

3.1.1 Vereinfachen Sie den Ausdruck $(S^4 + S^3 + S^2 + S - E) \cdot \vec{x} = \vec{x}$ so weit wie möglich. (2P)

3.1.2 Bestimmen Sie einen solchen Vektor \vec{x} (2P)

3.2 Eine quadratische Matrix heißt *stochastische Matrix*, falls alle ihre Elemente nicht negativ sind und für jede Spalte die Summe der Elemente den Wert 1 hat.

Somit ist S eine stochastische Matrix.

Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

„Ist M eine beliebige stochastische Matrix vom Format 2×2 , so ist $S \cdot M$ eine stochastische Matrix.“ (3P)

Aufgabe A3.2/2022 Matrizen und Prozesse

3 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Berechnen Sie die Inverse von A . (2P)

3.2 Begründen Sie, dass die Gleichung $B \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$ für jede Wahl von

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

keine eindeutige Lösung \vec{x} besitzt. (2P)

3.3 Untersuchen Sie, ob für die Matrixgleichung

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

gilt, ohne eine der vier Matrizen $A^2, B^2, A + B$ und $A - B$ dabei zu berechnen.