Lösung A1/2022 Analysis

1.1 $f(x) = 2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2 \cdot e^x$

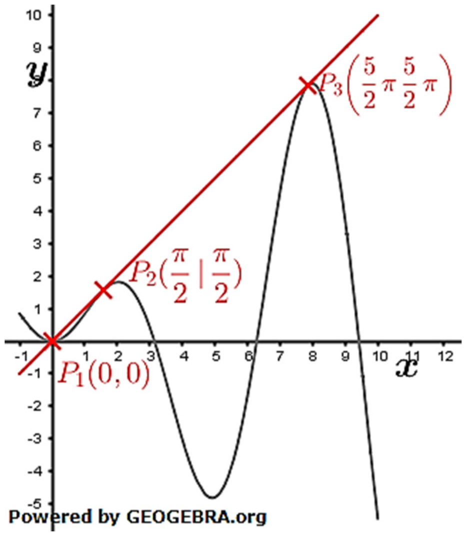
$f(0) = 2;\ f'(1) = 2e$

$\int_0^1 2e^x\,dx = [2e^x\}_0^1 = 2e - 2$

Geordnete Werte: $2; 2e - 2; 2e$

1.2.1 $g(x) = x \cdot sin(x)\,;\ -1 \le x \le 10.$

Gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.



Gemeinsame Punkte durch Gleichsetzung:

$x \cdot sin(x) = x$

$x \cdot sin(x) - x = 0$

$x(sin(x) - 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$x_1 = 0$

$sin(x) - 1 = 0$

$sin(x) = 1$

$x_2 = \frac{\pi}{2};\ \ x_3 = x_2 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$

Berührpunkte müssen gleich Steigung haben.

$g'(0) = 0$ ➔ kein Berührpunkt

$g(x) = x \cdot sin(x)$

$g'(x) = \sin(x) + xcos(x)$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$g'\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{5}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$

Die Steigung von $y = x$ ist ebenfalls 1. Die Punkte $P_2\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right)$ und ist $P_3\left(\frac{5}{2}\pi\middle|\frac{5}{2}\pi\right)$ sind Berührpunkte.

1.2.2 $G(x) = -xcos(x) + sin(x)\,;\ -1 \le x \le 10$

Wir bilden $G'(x)$:

$G'(x) = -\cos(x) + xsin(x) + \cos(x) = xsin(x)$ **q.e.d.**

Stammfunktion von g durch $P(0|7)$ enthält.

$G(x) = -xcos(x) + sin(x) + C$

$7 = -0 \cdot cos(0) + sin(0) + C$ | Punktprobe mit $P(0|7)$

$C = 7$

$G(x) = -xcos(x) + sin(x) + 7$

1.3 Allgemeine Form einer quadratische Funktion:
$p(x) = ax^2 + bx + c$
Wir benötigen 3 Bedingungen zum Lösen der Koeffizienten a, b und c.

(I) $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ ➔ $c = 1$ | Punktprobe mit $(0|1)$

(II) $p'(0) = -4$ | Orthogonalitätsbedingung

$p'(x) = 2ax + b$
$-4 = 2 \cdot 0 + b$
$b = -4$

(II) $p(x) = p'(x) = 0$

$2ax - 4 = 0$

$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$

$\frac{2}{a} = a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 1 \quad | \cdot a$

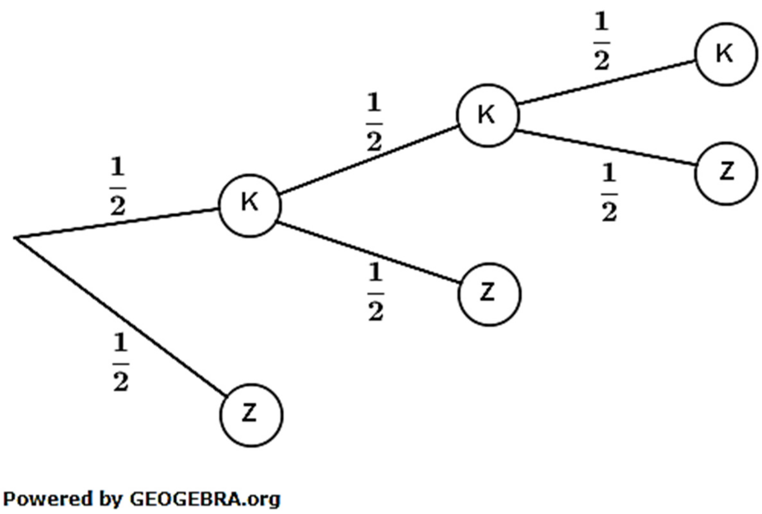
$2 = 4 - 8 + a$

$a = 6$

$p(x) = 6x^2 - 4x + 1$

<u>Lösung A2-1/2022 Stochastik</u>

2.1.1 Baumdiagramm



2.1.2 Durchschnittliche Anzahl Würfe.
Sei X die Anzahl der Würfe mit dem Ereignisraums
$\Omega = \{Z; KZ; KKZ, KKK\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten
$\mathrm{P(Z)} = \frac{1}{2}$; $P(KZ) = \frac{1}{4}$; $P(KKZ) = \frac{1}{8}$ und $P(KKK) = \frac{1}{8}$
Damit ergibt sich der Erwartungswert
$\mathrm{E(X)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$
Die durchschnittliche Anzahl der Würfe beträgt $1{,}75$.

2.2 (1) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$ für Zahl und $k = 1$.
$B_{n;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} > \frac{1}{8}$
Die Aussage ist korrekt.

(2) Wegen der identischen Wahrscheinlichkeit $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$ für Kopf und Zahl sind die Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zum Mittelwert.
Zwischen 3 und 4 liegt die Zahl $2{,}5$. Somit gilt diese Aussage für 5 Würfe.

Aufgabe A2-2/2022 Stochastik

2.1 E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.
$P(E_1) = P(BDK, BKD, DBK; DKB, KBD; KDB)6 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.
$P(E_2) = P\left(B\overline{B}\overline{B}, \overline{B}B\overline{B}, \overline{B}\overline{B}B\right) = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimal einen König gezogen.
A: Mindestens einmal einen Buben gezogen
B: Mindestens zweimal einen König gezogen
$P(A) = 1 - P\left(\left\{\overline{BBB}\right\}\right) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{19}{27}$
$P(B) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; KKK\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{7}{27}$
Nach dem Additionssatz gilt:
$P(E_3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(KKB; KBK; BKK) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$
$P(E_3) = \frac{19}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{9} = \frac{23}{27}$

2.2 Aufgabe zum Erwartungswert

A: Zweimal das gleiche Bild

B: Dreimal das gleiche Bild

C: Alle anderen Kombinationen

$P(A) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; BB\overline{B}, B\overline{B}B, \overline{B}BB; DD\overline{D}, D\overline{D}D, \overline{D}DD\right)$

$P(A) = 3 \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(KKK, BBB, DDD) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Auszahlungen:

$P(A) = x;\ \ P(B) = 18;\ \ P(C) = 0$

$E(X) = x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9}$

Wegen fairem Spiel muss $E(X) = 0$ sein, also

$x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} = 5$

$\frac{2}{3}x = 3$

$x = 4{,}5$

Die Auszahlung für Zweimal das gleiche Bild muss $4{,}50\ €$ betragen, damit das Spiel fair ist.

Lösung A3.1/2022 Vektorgeometrie

3 Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$

3.1 $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DA} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nachweis, das Viereck ein Rechteck ist:

Es muss gelten $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \wedge \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3;\quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3;$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$

Die genannten Bedingungen sind erfüllt, das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.

3.2 Koordinaten des Punktes A, für Schnittpunkt Diagonalen gleich $M(3{,}5|4|1{,}5)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $A(2|3|2)$.

3.3 Streckung des Vierecks $ABCD$ mit Vergrößerung der Fläche mit dem Faktor 5:

Bei Vergrößerung einer Fläche ändern sich die Seitenlängen mit dem Faktor der Wurzel der Flächenvergrößerung.

Beispiel Strecke $\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$

Vergrößerung der Strecke mit Faktor $\sqrt{5}$ ergibt:

$\overline{BC}^* = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

<u>Lösung A3.2/2022</u>

3 Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $B(2|4|5)$.

3.1 Begründung, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist:

Geradengleichung aufstellen:

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alle Koordinaten von g haben als x_1-Koordinate die Konstante 2. Die Gerade verläuft parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene. Da die x_1-Koordinate nicht Null ist, verläuft die Gerade g nicht in der x_2x_3-Koordinatenebene.

3.2 Punkt P auf g, sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{AP}:\overline{BP}$ ist:

Die Strecke $\overline{AB}$ wird damit in 3 gleiche Teile geteilt. Damit ist:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(2|2|4)$.

3.3 Nachweis, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind mit $C(4|2|1{,}5)$ und $M(2|1|3{,}5)$ auf g.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 1{,}5-3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$

Abstand von C zur Geraden g:

Da $M \in g \wedge \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$ ist $|\overrightarrow{MC}|$ Abstand des Punktes C von g.

$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Der Abstand des Punktes C von g beträgt $3\,LE$.

Lösung A3.1/2022 Matrizen und Prozesse

3 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.1 *Vereinfachung des Ausdruck $(\boldsymbol{S}^4 + \boldsymbol{S}^3 + \boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{x}$:*

Es gilt $\boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^2 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^3 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{S} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{E} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^3 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^2 \cdot \vec{x} + \boldsymbol{S}^4 \cdot \vec{x} - \boldsymbol{E} \cdot \vec{x} = \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} - \vec{x} = 3\vec{x}$.

3.1.2 *Bestimmung eines Vektors $\vec{x}$:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_1$ ➔ $-\frac{3}{4}x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

$\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_2$ ➔ $\frac{3}{4}x_1 = \frac{1}{2}x_2$

Die Addition der beiden Gleichungen führt zu $0 = 0$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Laut Aufgabenstellung ist nur eine Lösung gefragt.

Wir wählen x_1 frei mit z. B. $x_1 = \frac{4}{3}$ und erhalten dadurch

$x_2 = 2$. $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2 *Beurteilung der Aussage:*

„Ist $\boldsymbol{M}$ eine beliebige stochastische Matrix vom Format 2×2, so ist $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}$ eine stochastische Matrix."

$\boldsymbol{M}$ sei eine stochastische Matrix.

Es gilt $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$

wobei $0 \le a \le 1$ und $0 \le b \le 1$ gelten muss, damit alle Elemente der Matrix nicht negativ sind.

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a & \frac{1}{4}b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b \\ \frac{3}{4}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a & \frac{3}{4}b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Kontrolle, ob $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ eine stochastische Matrix ist:

1) Die Summe der Spalten ergibt jeweils 1.
2) Da $0\le a\le 1$ und $0\le b\le 1$ ist, sind alle Elemente der Matrix $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ nicht negativ, damit ist auch diese Bedingung erfüllt.

$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{M}$ ist eine stochastische Matrix.

Lösung A3.2/2022 Matrizen und Prozesse

3 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&7&6\\4&2&1\\4&2&1\end{pmatrix}$

3.1 *Inverse von $\boldsymbol{A}$.*

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&3&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longleftarrow -3\cdot III+I$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&0&1&0&-3\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longleftarrow II-I$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-4&0&0&-1&1&3\\0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\longleftarrow :-4\\ \longleftarrow :2\\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Begründung, dass $\boldsymbol{B} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{y}$ für jede Wahl von $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt.

$\boldsymbol{B} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{y} \quad | \quad \cdot \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}$ von links

$\vec{x} = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{y}$

Wegen $Det(\boldsymbol{B}) = 0$ existiert keine $\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}$, die Gleichung ist für jeden Vektor $\vec{y}$ unlösbar.

3.3 Untersuchung der Matrizengleichung $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$**:**

Wir multiplizieren aus:

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$

Diese Gleichung gilt nur, wenn $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ist.

Wir prüfen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Wir prüfen $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Und sehen bereits in der 1. Zeile, 1. Spalte, dass das nicht stimmt. Somit ist $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$