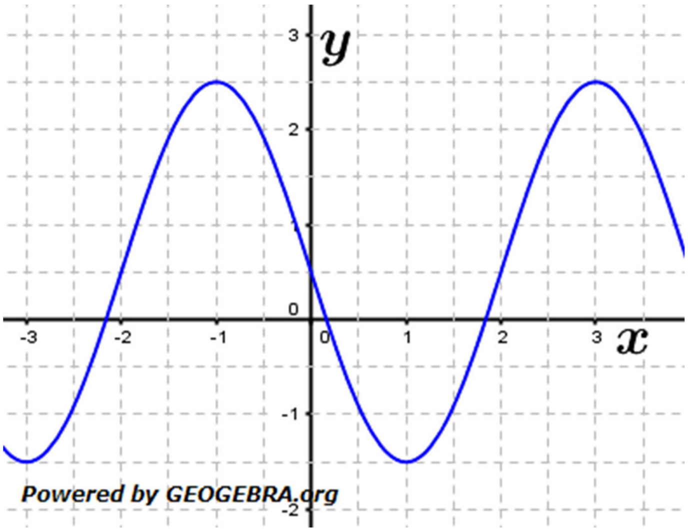
Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) Mustersatz 3

A1 Analysis

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: **6P**
Untersuche, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe deine Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.
b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.
c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.
d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.



1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. **4P**
Berechne, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagrechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)\ dx = 0$. **4P**
Skizziere ein mögliches Schaubild von g und begründe deine Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild der trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0|3)$ und hat in $T(3|0)$ einen Tiefpunkt. Gib einen möglichen Funktionsterm an. **3P**

A2 Stochastik

2. Bei der Winterportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

2.1 Gib für die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils einen Term an, Der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt. **3P**
A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."
B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."
C: „Der Biathlet trifft bei höchstens vier Schüssen."

2. 2 Erläutere anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung Der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. **2P**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Teil 1 BG *(ohne Hilfsmittel)* *Mustersatz 3*

A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).

3.1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$. **5P**
Die Ebene E wird orthogonal von g geschnitten und enthält dem Punkt $C(4|3|-8)$.
Bestimme den Schnittpunkt S von g und E.
Untersuche, ob S zwischen A und B liegt.

3.2 Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 + x_2 = 4$ und $F: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$. **3P**
Stelle die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1 S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichen das zugehörige Übergangsdiagramm. **1P**

3.1.2 Zeige, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. **2P**

3.1.3 Tom: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor.“ Beurteile diese Aussage. **2P**

3.2 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Abituraufgaben Teil 1 BG (*ohne Hilfsmittel*) *Mustersatz 3*

A1 Analysis Lösung

1.1 a) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = 0$ negativ Steigung.

b) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -2$ den Funktionswert $0{,}5$.

c) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -3$ einen Tiefpunkt.

d) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild ist an der Stelle $x = 3$ rechtsgekrümmt, damit ist die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ.

1.2 Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$.

$f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

$x^4 + x^2 - 6 = 0$

$x_{1,2}^2 = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1^2 = 2; \quad x_2^2 = -3$

$x_1^2 = 2 \qquad | \quad \sqrt{}$

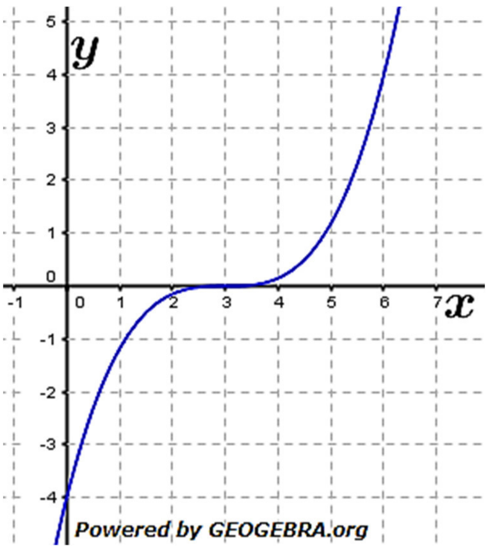
$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$x_2^2 = -3$ hat keine Lösung.

Das zugehörige Schaubild hat an den Stellen $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_1 = -\sqrt{2}$ waagrechte Tangenten.

1.3 $g(3) = 0$ ist eine Nullstelle bei $x = 3$. Da $\int_0^6 g(x)\ dx = 0$ sein soll, muss z. B. die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [0; 3]$ unterhalb der x-Achse mit der x-Achse einschließt, genauso groß sein wie die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [3; 6]$ oberhalb der x-Achse mit der x-Achse einschließt. Dies kann beispielsweise über das folgende Polynom dritten Grades dargestellt werden:

$g(x) = \frac{4}{27}(x-3)^3$



1.4 Die Kosinusfunktion ist symmetrisch zur y-Achse. Somit muss S ein Hoch- und T ein Tiefpunkt sein. Hieraus errechnet sich die Amplitude a:

$a = \frac{y_{HP} - Y_{TP}}{2} = \frac{3-0}{2} = 1{,}5$

Verschiebung d in y-Richtung:

$d = \frac{y_{HP} + Y_{TP}}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$

Periode p:

$p = 2 \cdot (x_{TP} - x_{HP}) = 2 \cdot (3 - 0) = 6$

$b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Ein möglicher Funktionsterm lautet:

$f(x) = 1{,}5\, cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1{,}5$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

A2 Stochastik Lösung

2.1 $B_{5;p}(X=4)=\binom{5}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)=5\cdot p^4\cdot(1-p)$
$P(B)=p^2\cdot(1-p)^3$
$B_{5;p}(X\leq 4)=1-B_{5;p}(X=5)=1-p^5$

2.2 Voraussetzung für eine Bernoullikette ist eine sich nicht ändernde Trefferwahrscheinlichkeit. Dies ist hier nicht der Fall, da die Trefferwahrscheinlichkeit des Biathleten sowohl von physischen als auch psychischen Umständen abhängt. Zudem ist die Trefferwahrscheinlichkeit auch stets von Naturbegebenheiten, wie z. B. dem Wind, abhängig.

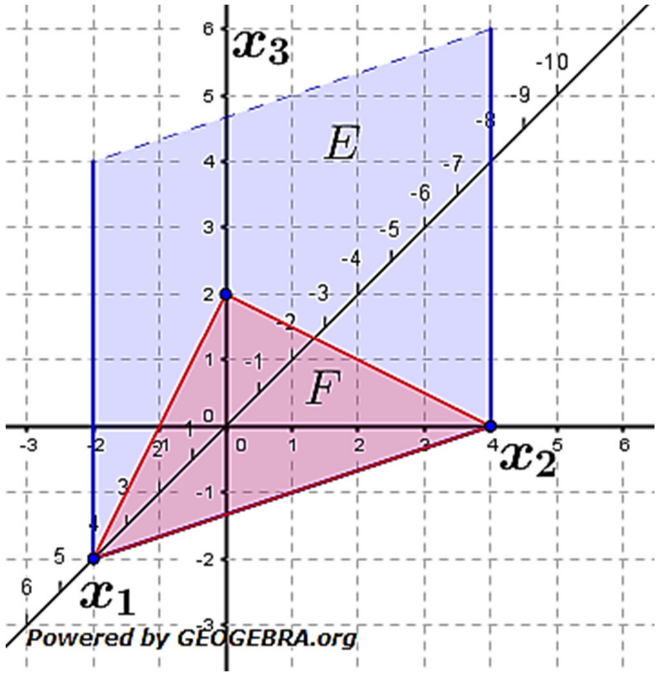
A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 Zur Bestimmung des Schnittpunktes benötigen wir die Gleichungen der Gerade sowie der Ebene.
Geradengleichung durch A und B:
$$g\colon\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
Ebenengleichung:
Da die Gerade orthogonal zur Ebene verläuft, hat die Ebene den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor.
$E\colon\ x_1-2x_2-3x_3=d$
$4-2\cdot 3-3\cdot(-8)=d$ | Punktprobe mit $C(4|3|-8)$.
$d=22$
$E\colon\ x_1-2x_2-3x_3=22$
Schnittpunkt von E und g:
$E\cap g$:
$x_1=1+t;\quad x_2=-1-2t;\quad x_3=3-3t$
$x_1;x_2;x_3\longrightarrow\ E$:
$1+t-2(-1-2t)-3(3-3t)=22$
$-6+14t=22$
$14t=28\Longrightarrow\ t=2$
$t\ \longrightarrow\ g$:
$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\-3\end{pmatrix}$$
Der Schnittpunkt liegt bei $S(3|-5|-3)$.
Lage von S:
Wegen $t>1$ liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

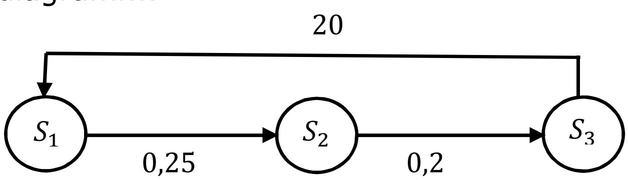
3.2 Spurpunkte von E:
$S_{x_{1E}}(4|0|0)$
$S_{x_{2E}}(0|4|0)$

Spurpunkte von F:
$S_{x_{1F}}(4|0|0)$
$S_{x_{2F}}(0|4|0)$
$S_{x_{3F}}(0|0|2)$



A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1.1 Übergangsdiagramm:



3.1.2 Stationäre Verteilung: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
Die gegebene Verteilung wiederholt sich von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt ja $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 20 = 1$.
Somit liegt hier eine zyklische Population mit einem dreimonatigen Zyklus vor. Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.

Nur bestimmte Verteilungen, beispielsweise $\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.2 3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II	1	1	1	10	I-II
III	0	1	1	8	

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II‘	0	1	1	8	
III‘	0	1	1	8	$\mathrm{II}' - \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	2	18	
II‘	0	1	1	8	
III‘‘	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält nur noch Nullen, das LGS hat unendlich viele Lösungen. In der zweiten Zeile ist ein Parameter frei wählbar, z. B. $x_3 = t$. Daraus ergibt sich:

$x_2 = 8 - t$
$x_1 + 2(8 - t) + 2t = 18$
$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 - t \\ t \end{pmatrix} \right\}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de