Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) Mustersatz 5

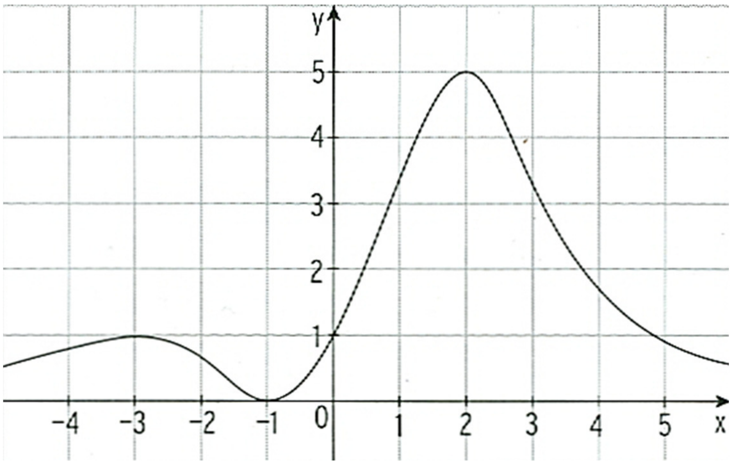
A1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = sin\left(\frac{1}{2}x\right);\ x \in \mathbb{R}$ **3P**
Gib die Periode von f an.
Bestimme eine Lösung der Gleichung $sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$.

1.2 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, schneidet diese bei $y = -1$ und hat im Punkt $H(3|0)$ eine waagrechte Tangente. **6P**
Bestimme den Funktionsterm.

1.3 Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $-x^2 + 2 = e^x$? **3P**
Begründe.

1.4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion h. **8P**



Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr sind:

- Das Schaubild von h besitzt eine Wendetangente, deren Steigung größer als eins ist.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
- Jede Stammfunktion von h ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) *Mustersatz 5*

A2 Stochastik

2. Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

2.1 Paul dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt Liegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: **2P**
A: „Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch."
B: „Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch."

2.2 Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. **3P**
Anna dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen?
Berechne $P(X \leq 2)$.

A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).

3. Gegeben sind die Ebenen $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $F\colon\ x_2 + 2x_3 = 8$

3.1 Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden. **3P**

3.2 Gegeben sind die Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt. **2P**
Beschreibe ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

3.1 Berechne die Inverse zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **2P**

3.2 Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$ **3P**
beschreibt eine stochastische Austauschmatrix.
Welche Werte für c und d sind möglich?
Für welchen Wert von c ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ein Stabilitätsvektor?

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) Mustersatz 5

A1 Analysis Lösung

1.1 $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

Der Sinus ist bei $\frac{3}{2}\pi = -1$. Wenn in der Klammer nicht $\frac{3}{2}\pi$ steht, ist der Ausdruck nicht -1.

$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \ x = 3\pi$

1.2 Wegen Symmetrie mit der y-Achse gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Umständliche Lösung:

Bedingungen aus Text ablesbar:

$f(0) = -1$, $f(3) = 0$ sowie $f'(3) = 0$.

$f(0) = -1 \Longrightarrow \ c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

(I)	$81a + 9b - 1 = 0$	|	$\cdot 6$
(II)	$108a + 6b = 0$	|	$\cdot 9$
(I)	$486a + 54b = 6$		
(II)	$972a + 54b = 0$		
(II)-(I)	$486a = -6$	|	$\cdot 486$
	$a = -\frac{1}{81}$		

$a \longrightarrow$(I)

$-\frac{1}{81} \cdot 81 + 9b - 1 = 0$

$9b = 2 \quad | \quad :2$

$b = \frac{2}{9}$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

Einfache Lösung:

$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$ bedeutet Berührpunkt mit der x-Achse, also doppelte Nullstelle. Wegen der Symmetrie ist $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle. Somit lautet die Funktionsgleichung:

$f(x) = a(x-3)^2 \cdot (x+3)^2$

Punktprobe mit $f(0) = -1$

$-1 = a \cdot 9 \cdot 9 \Longrightarrow \ a = -\frac{1}{81}$

$f(x) = -\frac{1}{81}\left((x-3)(x+3)\right)^2 = -\frac{1}{81}(x^2-9)^2$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

1.3 $-x^2 + 2 = e^x$ besitzt genau zwei Lösungen. Zum einen ist e^x streng monoton steigend ist, zum anderen ist $-x^2 + 2$ eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(0|2)$, der oberhalb des Schnittpunktes $S_y(0|1)$ von e^x mit der y -Achse liegt.

1.4

- Das Schaubild hat bei $x = -1$ einen Tief- und bei $x = 2$ einen Hochpunkt. Dazwischen liegt ein Wendepunkt mit einer Steigung größer eins.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
  Die Steigung von h bei $x = 1$ ist positiv, die bei $x = 3$ negativ, somit ist $h'(1) \cdot h'(3) < 0$.
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
  Die Fläche unter dem Schaubild von h im Intervall $[1;3]$ ist kleiner als 10, Ablesen von Kästchen im Schaubild.
- Das Schaubild von h verläuft im Intervall $[0;4]$ oberhalb der x-Achse, somit ist jede Stammfunktion von h in diesem Intervall streng monoton steigend.

A2 Stochastik Lösung

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

2.1 $P(A) = \left(\overline{ASS};\overline{ASS}\right) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

$P(B) = \{(ASS;DAME),(DAME;ASS)\} = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$

2.2 Die Zufallsvariable X kann die Werte 1 bis 6 annehmen. Bereits im ersten Zug kann ein Ass gezogen werden, wegen drei Königen und zwei Damen wird jedoch spätestes im sechsten Zug ein Ass gezogen werden.

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{32+20}{72} = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 $E\colon\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$F\colon\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4$

Wir wählen frei: $x_3 = t$

Aus F folgt dann: $x_2 = 4 - 2t$

$x_3; x_2 \longrightarrow\ E$

$4x_1 - (4 - 2t) + 2t = 4$

$4x_1 + 4 + 2t + 2t = 4$

$x_1 = -t$

Der Lösungsvektor lautet:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -t \\ 4 - 2t \\ t \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u}$
h: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{v}$
Die Gerade h ist dann orthogonal zu g und verläuft in E wenn gilt:

$$\vec{v} \circ \vec{u} = 0 \wedge \vec{v} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Die beiden Bedingungen führen zu zwei Gleichungen mit eventuell drei Unbekannten, sodass eine Unbekannte frei gewählt wird, z. B. $v_3 = 1$.

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$
Stochastischer Austauschprozess mit Spaltensumme 1.
Werte für c und d sind möglich zwischen 0 und 1; $c, d \in [0; 1]$ mit $c + d = 1$.
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein Stabilitätsvektor, wenn $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

ergibt

$$0{,}6c + 0{,}2 = 0{,}6 \Longrightarrow \ c = \frac{2}{3}$$

$$0{,}6d + 0{,}2 = 0{,}4 \Longrightarrow \ d = \frac{1}{3}$$