Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) Mustersatz 5

A1 Analysis Lösung

1.1 $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

Der Sinus ist bei $\frac{3}{2}\pi = -1$. Wenn in der Klammer nicht $\frac{3}{2}\pi$ steht, ist der Ausdruck nicht -1.

$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \quad x = 3\pi$

1.2 Wegen Symmetrie mit der y-Achse gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

<u>Umständliche Lösung:</u>

Bedingungen aus Text ablesbar:

$f(0) = -1$, $f(3) = 0$ sowie $f'(3) = 0$.

$f(0) = -1 \Longrightarrow \quad c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{I}) & 81a + 9b - 1 = 0 & | \quad \cdot 6 \\ (\mathrm{II}) & 108a + 6b = 0 & | \quad \cdot 9 \\ (\mathrm{I}) & 486a + 54b = 6 & \\ (\mathrm{II}) & 972a + 54b = 0 & \\ \hline (\mathrm{II})\text{-}(\mathrm{I}) & 486a = -6 & | \quad \cdot 486 \\ & a = -\frac{1}{81} & \end{array}$$

$a \longrightarrow (\mathrm{I})$

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{81} \cdot 81 + 9b - 1 = 0 & \\ 9b = 2 & | \quad :2 \\ b = \frac{2}{9} & \end{array}$$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

<u>Einfache Lösung:</u>

$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$ bedeutet Berührpunkt mit der x-Achse, also doppelte Nullstelle. Wegen der Symmetrie ist $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle. Somit lautet die Funktionsgleichung:

$f(x) = a(x-3)^2 \cdot (x+3)^2$

Punktprobe mit $f(0) = -1$

$-1 = a \cdot 9 \cdot 9 \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{81}$

$f(x) = -\frac{1}{81}\left((x-3)(x+3)\right)^2 = -\frac{1}{81}(x^2-9)^2$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

1.3 $-x^2 + 2 = e^x$ besitzt genau zwei Lösungen. Zum einen ist e^x streng monoton steigend ist, zum anderen ist $-x^2 + 2$ eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(0|2)$, der oberhalb des Schnittpunktes $S_y(0|1)$ von e^x mit der y -Achse liegt.

1.4

- Das Schaubild hat bei $x = -1$ einen Tief- und bei $x = 2$ einen Hochpunkt. Dazwischen liegt ein Wendepunkt mit einer Steigung größer eins.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
  Die Steigung von h bei $x = 1$ ist positiv, die bei $x = 3$ negativ, somit ist $h'(1) \cdot h'(3) < 0$.
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
  Die Fläche unter dem Schaubild von h im Intervall $[1; 3]$ ist kleiner als 10, Ablesen von Kästchen im Schaubild.
- Das Schaubild von h verläuft im Intervall $[0; 4]$ oberhalb der x-Achse, somit ist jede Stammfunktion von h in diesem Intervall streng monoton steigend.

A2 Stochastik Lösung

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

2.1 $P(A) = \left(\overline{ASS}; \overline{ASS}\right) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

$P(B) = \{(ASS; DAME), (DAME; ASS)\} = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$

2.2 Die Zufallsvariable X kann die Werte 1 bis 6 annehmen. Bereits im ersten Zug kann ein Ass gezogen werden, wegen drei Königen und zwei Damen wird jedoch spätestes im sechsten Zug ein Ass gezogen werden.

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{32+20}{72} = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 $E\colon\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$F\colon\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 4$

Wir wählen frei: $x_3 = t$

Aus F folgt dann: $x_2 = 4 - 2t$

$x_3; x_2 \longrightarrow E$

$4x_1 - (4 - 2t) + 2t = 4$

$4x_1 + 4 + 2t + 2t = 4$

$x_1 = -t$

Der Lösungsvektor lautet:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -t \\ 4 - 2t \\ t \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

3.2 $E\colon\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u}$

$h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{v}$

Die Gerade h ist dann orthogonal zu g und verläuft in E wenn gilt:

$\vec{v} \circ \vec{u} = 0 \wedge \vec{v} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Bedingungen führen zu zwei Gleichungen mit eventuell drei Unbekannten, sodass eine Unbekannte frei gewählt wird, z. B. $v_3 = 1$.

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1 Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Übergangsmatrix $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Stochastischer Austauschprozess mit Spaltensumme 1.

Werte für c und d sind möglich zwischen 0 und 1; $c, d \in [0; 1]$ mit $c + d = 1$.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein Stabilitätsvektor, wenn $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

$\begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

ergibt

$0{,}6c + 0{,}2 = 0{,}6 \Longrightarrow\ c = \frac{2}{3}$

$0{,}6d + 0{,}2 = 0{,}4 \Longrightarrow\ d = \frac{1}{3}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de