Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) Mustersatz 6

A1 Analysis

1.1 Gegeben sind die folgenden Abbildungen mit Schaubildern zweier Funktionen: **4P**

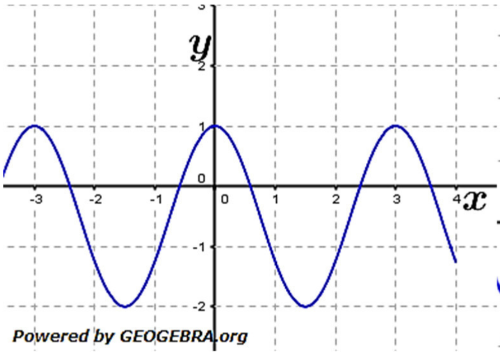


Abb. 1

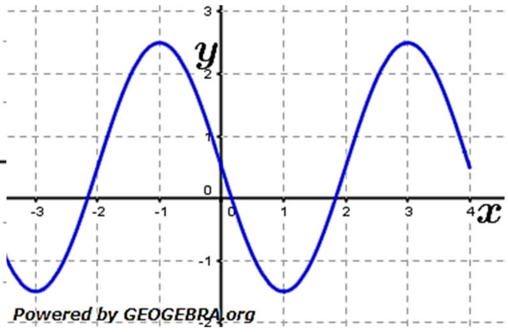


Abb. 2

Eine der beiden Abbildungen stellt das Schaubild der Gleichung
$y = a\cos(kx) + b$ dar.
Begründe, welche das ist und bestimme a, b und k.

1.2 Erna bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor. **3P**
In ihrem Heft findet sie folgende Aufschrieb:
$u(x) = v(x)$
$2\cos(x) + 3 = -2\cos(x+1)$
$4\cos(x) = -2$
$\cos(x) = -0{,}5$
$x = \frac{2}{3}\pi$
$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (2cps(x) + 3 - (-2\cos(x) + 1)\,dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$
Formuliere eine passende Aufgabenstellung.

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$. **5P**
K ist das Schaubild von f.
Die Tangente und Normale an K im Punkt $S(0|1)$ begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck.
Begründe, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

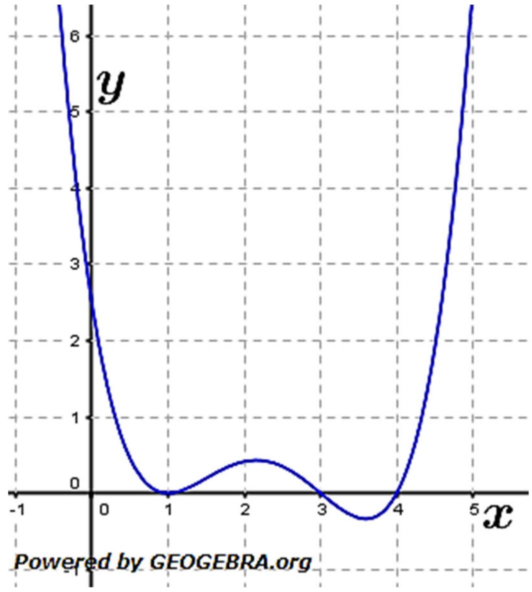
1.4 Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion g. **6P**

Das Schaubild einer Stammfunktion G von g ist C_g.
Begründe für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(1) $g''(2) > 0$

(2) Im Intervall $[-1; 4{,}5]$ gibt es drei Stellen, an denen das Schaubild C_g die Steigung 4 hat.

(3) $\int_2^4 g(x)\,dx < 1$



A2 Stochastik

2. Das Ziel eines Würfelspiels besteht darin, mit einem Würfel eine Sechs zu würfeln. Der Spieler hat bis zu drei Versuche.

2.1 Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Sechs im zweiten Wurf würfelt. **4P**

2.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es ihm gelingt, Die Sechs in einem der drei Versuche zu würfeln. **2P**

A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).

3.1 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems **3P**

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

3.2 Gegeben sind die Ebene $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und

Die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Zeige, dass E und g parallel zueinander sind. **1P**

3.2.2 Bestimme den Abstand von E und g. **2P**

A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

3.1 Untersuche die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. **3P**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3.2 Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit Ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliches Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:
$20\,\%$ der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C, kein Käufer wechselt zu Sorte B. $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A, $10\,\%$ der Käufer der Sorte B wechseln zur Sorte C. $10\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zur Sorte A, $20\,\%$ der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

3.2.1 Gib die zugehörige Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ an. **1P**

3.2.2 Erläutere die Bedeutung der Elemente a_{11}, a_{22} und a_{33} von $\boldsymbol{A}^3$. **2P**

Abituraufgaben Teil 1 BG (ohne Hilfsmittel) *Mustersatz 6*

A1 Analysis Lösung

1.1 Abbildung 1 stellt das Schaubild mit der Gleichung $y = acos(kx) + b$ dar.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-(-2)}{2} = 1{,}5$

$b = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5$

$k = \frac{2\pi}{p}$

$p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 3 - 0 = 2$

$k = \frac{2}{3}\pi$

$y = 1{,}5\, cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) - 0{,}5$

1.2 Die Funktionen u mit $u(x) = 2cos(x) + 3$ und v mit $v(x) = -2\cos(x) + 1$ schließen zwischen der y-Achse und dem kleinsten positiven Schnittpunkt eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt exakt.

Zum Verständnis (nicht Gegenstand eines Klausuraufschriebs):
Über die Gleichsetzung $u(x) = v(x)$ wird der kleinste positive Schnittpunkt der beiden Funktionen ermittelt. Danach wird die Fläche berechnet aus dem Integral „Obere Kurve minus untere Kurve“, also $\int_0^{x_S}(u(x) - v(x))\, dx$.

1.3 $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$n(x) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot x + f(0)$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f'(0) = -1$

$f(0) = 1$

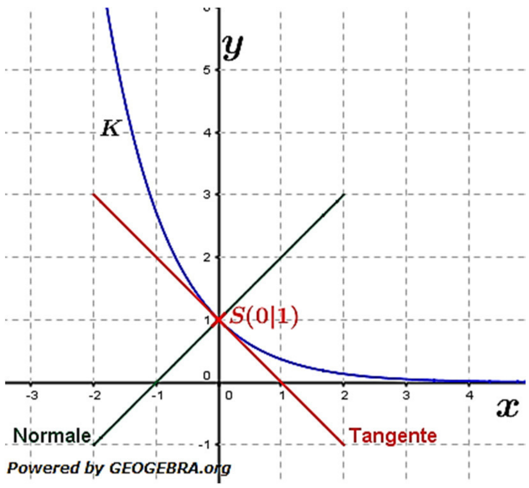
$t(x) = -x + 1$

$n(x) = x + 1$

$t(x) = 0 = -x + 1 \implies x_{t_0} = 1$

$n(x) = 0 = x + 1 \implies x_{t_n} = -1$

Die beiden Nullstellen von t und n liegen symmetrisch zur y-Achse. Die beiden Nullstellen bilden zusammen mit dem Punkt $S(0|1)$ ein Dreieck, welches symmetrisch zur y-Achse ist und damit auch gleichschenklig.



1.4 (1) Die Aussage ist falsch. g ist an der Stelle $x_0 = 2$ rechtsdrehend, somit ist $g''(2) < 0$.

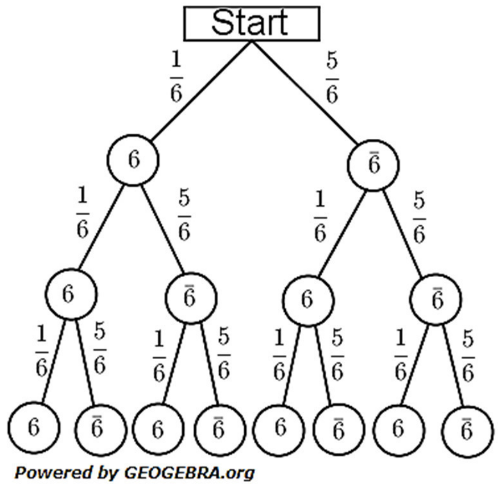
(2) Die Aussage ist falsch. An der Grafik lesen wir ab, dass g bei etwa $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ den Funktionswert 4 hat, also hat C_g bei $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ die Steigung 4, somit im vorgegebenen Intervall nur einmal die Steigung 4.

(3) Die Aussage ist richtig. Die Fläche unter g im Intervall $[2; 3]$ ist nur geringfügig größer als die Fläche unter g im Intervall $[3; 4]$, damit ist die Differenz der beiden Flächen kleiner als 1.

A2 Stochastik Lösung

2.1 Sechs im zweiten Wurf:

$P(\bar{6};6)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$



2.2 Es sei:

A: „Sechs in einem der drei Versuche.“

$P(A)=P(6)+P(\bar{6};6)+P(\bar{6};\bar{6};6)$

$=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{36+30+25}{216}=\frac{91}{216}$

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	1	8	
II	1	4	1	10	II-I
III	1	1	1	3	III-I

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	1	8	
II‘	0	2	0	2	
III‘	0	-1	0	-5	$\mathrm{II}'+\mathrm{III}'\cdot 2$

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	1	8	
II‘	0	2	0	2	
III‘‘	0	0	0	-8	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:
Das LGS hat keine Lösung.

3.2.1 $\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{rv_g}\overset{?}{=}0$

$$\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=8-4-4=0 \quad\Rightarrow\quad E\parallel g$$

3.2.2 Da die Gerade und die Ebene parallel zueinander verlaufen. Kann der Abstand über die HNF berechnet werden. Als Punkt der Geraden nehmen wir deren Aufpunkt. Dann gilt:

$$d=\frac{1}{\sqrt{81}}\left(\begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}(64+1+16)=\frac{81}{9}=9$$

A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3. 1

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	1	8	
II	1	4	1	10	II-I
III	1	1	1	3	III-I

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	8	
II‵	0	2	0	2	
III‵	0	-1	0	-7	$\mathrm{II}' + 2 \cdot \mathrm{III}'$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	2	2	8	
II‵	0	2	0	2	
III‵‵	0	0	0	-12	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen das Ergebnis ab:
Die dritte Zeile enthält Nullen und im Ergebnis eine Zahl, das LGS hat keine Lösung.

3.2.1 Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Die Elemente der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{A}^3$ geben den jeweiligen Anteil der Käufer an, die ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt, 3 Monate später wieder die gleiche Kaffeesorte wählen.