Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (o. Hilfsmittel) ab 2021

Aufgabe A3.1/2021

3.1 Die Punkte $A(5|1|0)$, B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene und es gilt:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.1.1 Begründen Sie, dass $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben. (3P)

3.1.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck $ABCD$ kein Quadrat sein muss. (2P)

3.1.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D. (2P)

Aufgabe A3.2/2021

3.2.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -4 \\ -x_1 & +2x_2 & & = & -3 \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

(3P)

3.2.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

3.2.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind. (2P)

3.2.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat. (2P)

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (o. Hilfsmittel) ab 2021

Aufgabe A3.1/2022

3 Für ein Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

3.1 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{DA}$.
Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Rechteck ist. (3P)

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, sodass sich die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ in $(3{,}5|4|1{,}5)$ schneiden. (2P)

3.3 Durch Streckung des Vierecks $ABCD$ wird dessen Flächeninhalt um den Faktor 5 vergrößert. Die Seitenverhältnisse bleiben dabei unverändert. Berechnen Sie eine Seitenlänge des entstehenden, vergrößerten Vierecks. (2P)

Aufgabe A3.2/2022

3 Die Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $A(2|4|5)$.

3.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist, aber nicht in dieser Ebene liegt. (2P)

3.2 Bestimmen Sie einen Punkt P auf g, sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $AP:BP$ ist. (2P)

3.3 $C(4|2|1{,}5)$ ist ein weiterer Punkt und $M(2|1|3{,}5)$ ein Punkt auf g.
Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Abstand von C zur Geraden g. (3P)

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (o. Hilfsmittel) ab 2021

Lösung A3.1/2021

3.1.1 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 12 - 12 + 0 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ stehen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ senkrecht aufeinander.

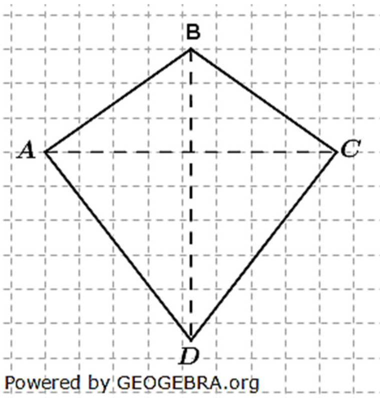
$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$; $\quad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{72}$

3.1.2 Skizze:

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ und $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$.

Das Viereck, welches kein Quadrat ist, muss eine Raute sein.



3.1.3 Eckpunkte B und D für Quadrat:

B: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$B(3|5|-4)$; $\quad D(1|3|4)$

Lösung A3.2/2021

3.2.1

Gauß-Schema

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	−1	−4	
II	−1	2	0	−3	II+I
III	0	1	1	2	

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	−1	−4	
II	0	4	−1	−7	
III	0	1	1	2	$4 \cdot \mathrm{III} - \mathrm{II}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	1	2	−1	−4	
II	0	4	−1	−7	
III	0	0	5	15	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$5x_3 = 15$

$x_3 = 3$; $\quad 4x_2 - 3 = -7$

$4x_2 = -4$

$x_2 = -1$ $\quad x_1 - 2 - 3 = -4$

$x_1 = 1$

$\mathbb{L} = \{x_1; x_2; x_3 | 1; -1; 3\}$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (o. Hilfsmittel) ab 2021

3.2.2.1 $g \parallel h$:

$\overrightarrow{rv_g} = k \cdot \overrightarrow{rv_h}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfung auf Identität:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in h \ \vee \ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in g$:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$2 = 1 + r \ \Rightarrow \ r = 1$

$0 = -1 + 2r \ \Rightarrow \ r = \frac{1}{2}$

g nicht identisch h.

3.2.2.2 Punkt P mit $d(g;P) = d(h;P)$:

Wir halbieren die Strecke zwischen den beiden Aufpunkten.

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Eine Lösung wäre $P(1{,}5|-0{,}5|,5)$, andere Lösungen denkbar.

Lösung A3.1/2022

3 Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten A, B, C und D.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3.1 $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{DA} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nachweis, das Viereck ein Rechteck ist:

Es muss gelten $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \wedge \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$; $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$;

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$$

Die genannten Bedingungen sind erfüllt, das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.

3.2 Koordinaten des Punktes A, für Schnittpunkt Diagonalen gleich $M(3{,}5|4|1{,}5)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $A(2|3|2)$.

3.3 Streckung des Vierecks $ABCD$ mit Vergrößerung der Fläche mit dem Faktor 5:

Bei Vergrößerung einer Fläche ändern sich die Seitenlängen mit dem Faktor der Wurzel der Flächenvergrößerung.

Beispiel Strecke $\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$

Vergrößerung der Strecke mit Faktor $\sqrt{5}$ ergibt:

$\overline{BC}^* = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

Lösung A3.2/2022

3 Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $B(2|4|5)$.

3.1 Begründung, dass g parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene ist:

Geradengleichung aufstellen:

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix}$

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Alle Koordinaten von g haben als x_1-Koordinate die Konstante 2. Die Gerade verläuft parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene. Da die x_1-Koordinate nicht Null ist, verläuft die Gerade g nicht in der x_2x_3-Koordinatenebene.

3.2 Punkt P auf g, sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{AP}:\overline{BP}$ ist:

Die Strecke $\overline{AB}$ wird damit in 3 gleiche Teile geteilt. Damit ist:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(2|2|4)$.

3.3 Nachweis, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind mit $C(4|2|1{,}5)$ und $M(2|1|3{,}5)$ auf g.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 1{,}5-3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$

Abstand von C zur Geraden g:

Da $M \in g \wedge \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MC}$ ist $|\overrightarrow{MC}|$ Abstand des Punktes C von g.

$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Der Abstand des Punktes C von g beträgt $3\,LE$.