

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Dokument mit 30 Aufgaben

Aufgabe A1



1. Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt.
Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.
 - 1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: **3P**
A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag.“
B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.“
 - 1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von 100 €. **4P**

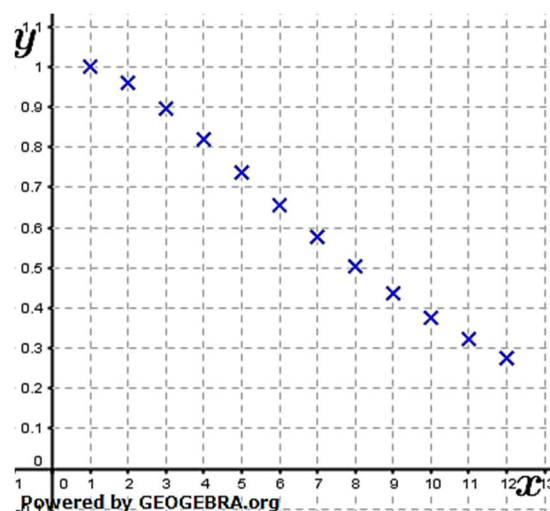
Ein Gast erhält die Rückerstattung von 100 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt?
 - 1.3 Der Hotelier plant an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.
 - 1.3.1 Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann. **2P**
 - 1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert?
 - 1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gäste sind 96 zufrieden. Bestimmen Sie ein 95 % Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste. **4P**

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Aufgabe A2

2. Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind. Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 €. Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von 100 €.

- 2.1 Anton bucht dieses Angebot. **5P**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
A: „Anton erlebt keinen Sturmtag.“
B: „Anton kann nur in den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.“
C: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.“
D: „Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage“.
- 2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will. **5P**
- 2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“ **5P**

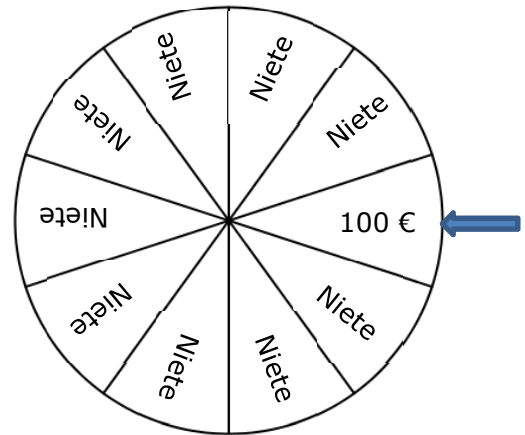
Im nachfolgenden Schaubild liegen die dargestellten Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 0,8^x + x \cdot 0,2 \cdot 0,8^{x-1}$.



Interpretieren Sie das Schaubild und beantworten Sie Antons Frage.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Aufgabe A3

1. Ein Autohaus bietet seinen Besuchern bei einer Präsentation der neuen Modelle folgendes Glücksspiel an: Das rechts abgebildete Glücksrad, bestehend aus zehn gleich großen Sektoren, wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil zufällig auf einen Sektor.
- Ein Teilnehmer zahlt einen Einsatz und darf das Glücksrad drehen. Zeigt der Pfeil am Ende der Drehung auf den Sektor „100 €“, so erhält der Teilnehmer diesen Betrag. Ansonsten geht er leer aus. Der Teilnehmer darf so lange weiterspielen, bis er ein zweites Mal „100 €“ gewinnt, oder aber ein zweites Mal leer ausgeht.



- 1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm zum beschriebenen Glücksspiel. **4P**
- 1.2 Welchen Einsatz muss das Autohaus von einem Teilnehmer verlangen, damit das Spiel fair ist? **4P**
- 1.3 Ein Besucher nimmt an dem Spiel teil und zählt zu den glücklichen Gewinnern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Spiel nach drei Drehungen zu Ende? **3P**
- 1.4 Am Ende des Tages wurde das Spiel 180 mal von den Besuchern gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden? **4P**

Aufgabe A4

2. Eine Werkstattkette bietet vor der kalten Jahreszeit seinen Kunden die Angebote „Wintercheck“ sowie „Reifenwechsel“ an. 60 % aller Kunden nehmen das Angebot „Wintercheck“ an, 30 % nutzen die Möglichkeit des Reifenwechsels. 28 % aller Kunden nehmen keines der beiden Angebote wahr.
- 2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zugleich beide Angebote annimmt. **5P**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kunde für genau eines dieser Angebote entscheidet?
- 2.2 Das Angebot „Wintercheck“ kostet 19 €, das Angebot „Reifenwechsel“ kostet 9 €. Damit sich die Angebote lohnen, muss die Werkstatt täglich insgesamt mindestens 800 Euro Umsatz mit beiden Angeboten machen. **4P**
Wieviel Kunden müssen die Werkstatt täglich im Mittel aufsuchen, damit sich die Angebote für die Werkstatt lohnen?

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

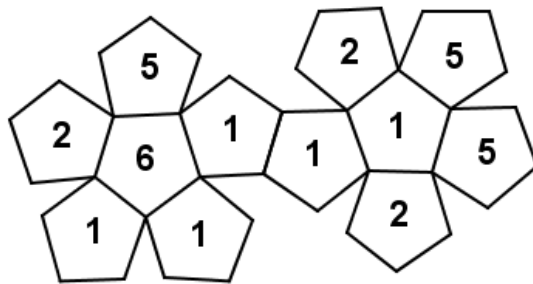
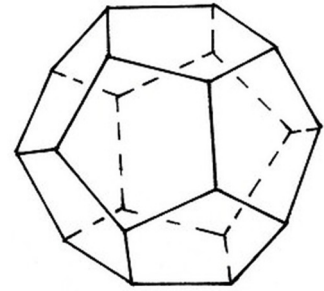
- 2.3 Eine Stichprobe hat ergeben, dass 85 von 1000 Winterchecks nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurden. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Wintercheck nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurde. **6P**
Geben Sie einen Schätzwert für p an. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für p zum Konfidenzniveau 95 %.

Aufgabe A5

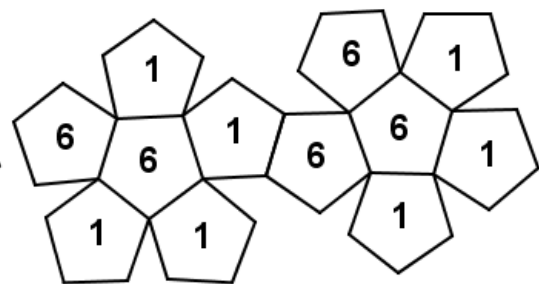
1. Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle. Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an un versteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigaretenschachteln gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbänderolen überprüft.
In einer süddeutschen Großstadt hatten 10,7 % der Zigaretenschachteln keine Steuerbänderole.
- 1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigaretenschachteln **5P**
a) genau 4 Schachteln keine Steuerbänderole haben;
b) mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbänderole hat;
c) mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbänderole haben;
- 1.2 Bestimme, wie viele Zigaretenschachteln man mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens eine Schachtel ohne Steuerbänderole erhält. **4P**
- 1.3 In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt. Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird. **3P**
- 1.4 In einer großen Hafenstadt werden 200 leere Zigaretenschachteln Zufällig dem Hausabfall entnommen und untersucht. Dabei werden 22 unverzollte Schachteln gefunden. **3P**
Bestimme aufgrund der Stichprobe ein 90 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der unverzollten Zigaretenschachteln im Abfall.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Aufgabe A6

2. Zwei Dodekaeder werden als Spielwürfel verwendet. Ihre 12 Seiten sind wie unten abgebildet beschriftet. Es gilt stets die Zahl als geworfen, die auf der obersten Fläche zu sehen ist. Alle Seiten liegen mit derselben Wahrscheinlichkeit oben.



Seiten von Würfel I



Seiten von Würfel II

- 2.1 Würfel I wird viermal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: **6P**
 A: Es tritt die Zahlenreihenfolge 5 – 6 – 2 – 2 auf.
 B: Alle Zahlen sind verschieden.
 Marc behauptet: Das Ereignis „Alle Zahlen sind gleich“ ist das Gegenereignis von B. Nimm Stellung.
- 2.2 Würfel II wird viermal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Sechs häufiger auftritt als die Eins. **3P**
- 2.3 Janos und Marc benutzen die beiden Würfel für ein Spiel. Jonas wirft Würfel I einmal, Marc wirft Würfel II einmal. Gewonnen hat derjenige, dessen Würfel die höhere Zahl anzeigt. Der Gewinner erhält vom Verlierer die höhere der geworfenen Zahlen in Euro ausgezahlt. Bei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden und keiner der beiden muss zahlen. Prüfe, für wen sich das Spiel langfristig lohnt. **6P**

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Aufgabe A7

1. An einem Kundenschalter einer Elektronik-Fachmarktkette kommen Kunden, die Probleme mit ihrem Smartphone haben. Die Kundenberater am Schalter wissen aufgrund ihrer Erfahrung, dass diese Reklamationen auf folgenden typischen Problemen mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen:

Problem	Bedienungs- fehler	Defekter Akku	Betriebs- systemfehler	Sonstiger Fehler
Wahrscheinlichkeit	30 %	20 %	10 %	40 %

Von diesen vier Problemen tritt pro Reklamation genau eines auf.

Die Kundenberater können nur dann vor Ort helfen, falls es sich um einen Bedienungsfehler handelt oder wenn der Akku defekt ist. In allen anderen Fällen muss das Smartphone zur Reparatur geschickt werden.

- 1.1 An einem Morgen waren schon vier Kunden mit Smartphone-Reklamationen am Kundenschalter. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: **5P**
 A: Der Kundenberater konnte allen vier Kunden vor Ort helfen.
 B: Ein Bedienungsfehler lag genau bei einem Smartphone vor.
 C: Bei mindestens einem Smartphone lag ein Betriebssystemfehler vor.
- 1.2 Formuliere für die Vorgänge am Kundenschalter eine mathematische Fragestellung, die mit Hilfe der Ungleichung $1 - 0,9^n > 0,5$ beantwortet werden kann. **2P**
- 1.3 Einem Kunden mit einem Smartphone-Problem konnten die Kundenberater vor Ort helfen. **4P**
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit lag ein Bedienungsfehler vor?
- 1.4 Nach jeder Bearbeitung einer Reklamation wird der Kunde nach seiner Zufriedenheit befragt. **4P**
 Von 150 befragten Kunden sind 105 zufrieden.
 Bestimme ein 95 %-Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Kunden.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Aufgabe A8

2. Bei einem „gezinkten Würfel“ beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, nur 10 %. Mit dem Würfel wird 100-mal nacheinander gewürfelt. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Sechsen.
- 2.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 Sechsen auftreten. **3P**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 16 Sechsen auftreten.
- 2.2 In welchem Intervall liegt die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 %. **3P**
- 2.3 Ermittle, wie oft ein Spieler mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal eine „6“ zu erhalten. **3P**
- 2.4 Mit diesem Würfel führen nun Tristan und Isolde ein Glücksspiel durch. Tristan legt einen bestimmten Geldbetrag, welcher mindestens 4 € beträgt, als Einsatz auf den Tisch. Dann würfelt er einmal.
Fällt eine „6“, so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe verdoppeln; fällt keine „6“, darf Isolde sich 2 € vom Tisch nehmen. Dann wirft Tristan den Würfel ein zweites Mal. Fällt eine „6“, so muss Isolde die auf dem Tisch liegende Summe wiederum verdoppeln; fällt keine „6“, darf Isolde sich erneut 2 € vom Tisch nehmen. Damit ist das Spiel beendet und Tristan erhält den noch auf dem Tisch liegenden Restbetrag.
Ermittle, wie groß der Einsatz von Tristan sein muss, damit dieses Spiel fair ist. **6P**

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A1

1. Die Angabe „dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0,2$ ist.

- 1.1 A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag.“

Stichprobenumfang ist $n = 3$, die Zufallsvariabel $X = 1$ für einen Sturmtag.

$$P(A) = \binom{3}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384$$

B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.“

Stichprobenumfang ist $n = 7$, die Zufallsvariabel $X \geq 1$ für mindestens einen Sturmtag.

Es sei $\bar{B}$ das Gegenereignis von B , dann gilt:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 = 1 - 1 \cdot 0,8^7 \approx 0,79$$

- 1.2 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

C: „Der Gast erhält eine Rückerstattung wegen mehr als zwei Sturmtagen.“

D: „Der Gast erlebt genau drei Sturmtage.“

Damit ist

E: Der Gast erlebt genau drei Sturmtage unter der Bedingung (Voraussetzung) dass er eine Rückerstattung erhalten hat.

$$P(E) = P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

Es sei $\bar{C}$ das Gegenereignis von C mit $\bar{C}$: „weniger als drei Sturmtage“, dann gilt:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

$$= 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4 \right) \approx 0,148$$

$$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 \approx 0,115$$

Da $P(C)$ und $P(D)$ nur den Wert 0,115 gemeinsam haben, ist $P(C \cap D) = 0,115$.

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0,115}{0,148} \approx 0,775$$

Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 77,5 % genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

- 1.3.1 Der Hotelier geht von einer Bernoullikette aus mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ $p = 0,2$ für Sturmtag im Januar und dem Stichprobenumfang von $n = 310$ Sturmtagen im Januar in den nächsten 10 Jahren. Der Mittelwert ist damit:

$$\mu = n \cdot p = 310 \cdot 0,2 = 62$$

- 1.3.2 Es handelt sich um eine Bernoullikette

$$B_{310;0,2}(X \leq 49) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{310-i} \approx 0,0352$$

- 1.4 95 % Konfidenzintervall bezüglich 96 zufriedenen Gästen von 120 Gästen:

$$h = \frac{96}{120} = 0,8$$

$$\left[0,8 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}}; 0,8 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}} \right] = [0,728; 0,872]$$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A2

2. Die Angabe „dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0,2$ ist.

2.1 $P(A) = \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^7 \approx 0,21$

$P(B) = 0,8^3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 \approx 0,0131$

Es sei $\bar{C}$ „höchstens ein Sturmtag“ das Gegenereignis von C , dann gilt:

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 \right) \approx 1 - 0,577 \approx 0,423$

- 2.2 Gesucht wird der Erwartungswert.

Der Hotelier verdient 500 € pro Gast, wenn höchstens zwei Sturmtage pro Woche auftreten, ansonsten verdient er nur 300 € pro Gast.

Berechnung für $P(X = 500 \text{ €})$

$P(X = 500) = \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5 \approx 0,852$

Da in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Summe aller möglichen Ereignisse stets 1 ist, gilt somit für $P(X = 300) = 1 - P(X = 500) = 0,148$.

$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 500 \cdot 0,852 + 300 \cdot 0,148 = 470,4 > 460$

Da der Erwartungswert mit 470,4 € größer ist als die vom Hotelier gesetzte Untergrenze von 460 €, kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

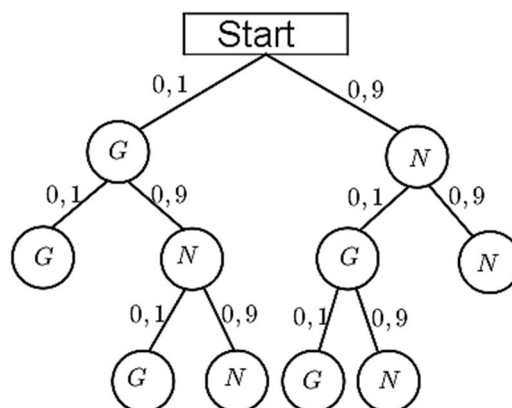
- 2.3 Im Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben, denn die gegebene Gleichung ist nichts anderes als die Auflösung der Bernoulliformel

$B_{x;0,2}(X \leq 1) = \binom{x}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^x + \binom{x}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{x-1} = 0,8^x + x \cdot 0,2 \cdot 0,8^{x-1}$

Anton darf für seinen nächsten Skiurlaub höchstens sechs Urlaubstage buchen.

Lösung A3

- 1.1 Baumdiagramm



Powered by GEOGEBRA.org

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 1.2 Es gibt die nachfolgenden Ergebnisse mit den jeweiligen Auszahlungen. Der Spieleinsatz sei a €.

$$P(G; G) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(G; N; G) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,009 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(G; N; N) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,081 \quad \text{Auszahlung } 100,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; G; G) = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,009 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; G; N) = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,081 \quad \text{Auszahlung } 100,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; N) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81 \quad \text{Auszahlung } -a \text{ €}$$

Gesucht ist der Erwartungswert $E(X) = 0$

$$(200,00 - a) \cdot 0,01 + 2 \cdot (200,00 - a) \cdot 0,009 + 2 \cdot (100,00 - a) \cdot 0,081 - 0,81a = 0$$

$$2 - 0,01a + 3,60 - 0,018a + 16,20 - 0,162a - 0,81a = 0$$

$$21,8 = a$$

Das Autohaus muss einen Einsatz von 21,80 € verlangen, damit das Spiel fair ist.

- 1.3 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich „Genau drei Drehungen bis Spielende und mindestens ein Gewinn von 100 €.“

A: „Mindestens ein Gewinn von 100 €.“

B: „Genau drei Drehungen bis Spielende.“

$$P(A) = 0,1^2 + 2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,19$$

$$P(B) = 1 - (0,1^2 + 0,9^2) = 0,18$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,19} \approx 0,947$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.

- 1.4 C: „In einem Spiel genau 200 € gewonnen.“

$$P(C) = 0,1^2 + 2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,028$$

D: „Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal 200 € gewonnen.“

$$P(D) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{180}{k} \cdot 0,028^k \cdot 0,972^{180-k} \approx 0,013$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 Spielen mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden, beträgt etwa 1,3 %.

Lösung A4

- 2.1 Aufstellung der Ereigniswahrscheinlichkeiten für eine Vierfeldertafel:

A: „Kunde nimmt das Angebot „Wintercheck“ an.“

B: „Kunde nimmt das Angebot „Reifenwechsel“ an.“

$$P(A) = 0,6; \quad P(B) = 0,3 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,28$$

Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\bar{B}$	0,42	0,28	0,7
	0,6	0,4	1

Aus der Vierfeldertafel lesen wir ab:

C: Kunden, die beide Angebote annehmen:

$$P(C) = P(A \cap B) = 0,18$$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot:

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 2.2 Gesucht wird der Stichprobenumfang des Erwartungswertes $E(X) = 800$.

Sei die Anzahl der Kunden, die ein Angebot annehmen, dann gilt:

$$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0,6 + 9 \cdot n \cdot 0,3 = 800$$

$$n \approx 56,7$$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

- 2.3 Schätzer für p : $\frac{85}{1000} = 0,085$

$$0,085 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,085 \cdot 0,915}{1000}} \leq p \leq 0,085 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,085 \cdot 0,915}{1000}}$$

$$0,0762 \leq p \leq 0,0938 \text{ bzw. } 7,62 \% \leq p \leq 9,38 \%$$

Lösung A5

- 1.1 Bernoulliexperiment mit $n = 40$ und $p = 0,107$.

a) $B_{40;0,107}(X = 4) = 0,2037 \approx 20,4 \% \text{ (WTR)}$

b) $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,107 = 4,28$

$$B_{40;0,107}(X \geq 5) = 1 - B_{40;0,107}(X \leq 4) = 1 - 0,5713 = 0,4287 \approx 42,9 \% \text{ (WTR)}$$

c) $B_{40;0,107}(3 \leq X \leq 5) = B_{40;0,107}(X \leq 5) - B_{40;0,107}(X \leq 2) = 0,5633 \approx 56,3 \% \text{ (WTR)}$

- 1.2 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$$B_{n;0,107}(X \geq 1) \geq 0,8$$

$$1 - B_{n;0,107}(X = 0) \geq 0,8$$

$$B_{n;0,107}(X = 0) \leq 0,2$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,107^0 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$n \cdot \ln(0,893) \leq \ln(0,2)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,893)} = 14,22$$

Es müssen mindestens 15 Schachteln eingesammelt werden.

- 1.3 Aus 100 Stangen (darunter 8 unverzollte) werden nacheinander 5 Stangen ohne Zurücklegen entnommen. $p = 0,08$ für unverzollte Ware.

Die Lieferung wird beschlagnahmt, wenn mindestens eine unverzollte Stange gefunden wird.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0,3468 \approx 34,7 \%$$

- 1.4 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{22}{200} = 0,11; n = 200; z = 1,64$$

$$\left[0,11 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}}; 0,11 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}} \right] = [0,0737; 0,1463]$$

Mit 90 %-iger Sicherheit liegt der Anteil an unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall zwischen 7,37 % und 14,63 %.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Lösung A6

2.1 Würfel 1: $P(1) = \frac{5}{12}$; $P(2) = \frac{3}{12}$; $P(5) = \frac{3}{12}$; $P(6) = \frac{1}{12}$

$$P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{768} = 0,0013$$

$$P(B) = 4! \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} = 24 \cdot \frac{5}{2304} = 0,0521$$

Marc's Behauptung "Alle Zahlen sind gleich" sei das Gegenereignis zu Ereignis B ist falsch.

Das Ereignis A: „Zahlenreihenfolge ist 5 – 6 – 2 – 2“ ist ebenfalls im Gegenereignis von B enthalten. Im Ereignis A sind nur **zwei**, nicht aber **alle** Zahlen gleich.

- 2.2 Bei vier Würfeln tritt die Sechs dann häufiger auf als die Eins, wenn die Sechs mindestens dreimal erscheint.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechsen an.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 \\ &= 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0,1688 + 0,0301 = 0,1989 \approx 19,9 \% \end{aligned}$$

- 2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag von Jonas (J) an Marc (M).

x_i	-2	-5	-6	6
Ergebnisse	(M1;J2)	(M1;J5)	(M1;J6)	(M6;J6)
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{144}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{7}{48} - 5 \cdot \frac{7}{48} - 6 \cdot \frac{7}{144} + 6 \cdot \frac{55}{144} = 0,979$

Jonas zahlt durchschnittlich pro Spiel etwa 98 Cent an Marc.

Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

Lösung A7

- 1.1 Bernoullikette mit $n = 4$ und $p = 0,5$ für Hilfe vor Ort.

$$P(A) = B_{4;0,5}(X = 4) = 0,0625 = 6,25 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(B) = B_{4;0,5}(X = 1) = 0,4116 = 41,2 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(C) = B_{4;0,5}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,5}(X = 0) = 1 - 0,0625 = 0,9375 = 93,75 \% \text{ (WTR)}$$

- 1.2 Wie viele Reklamationen müssen mindestens erfolgen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 50 % mindestens 1 Betriebssystemfehler auftritt.

- 1.3 Fragestellung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Das Vorwissen, dass die Kundenberater vor Ort helfen konnten, wird als Ereignis D bezeichnet.

D : Kundenberater kann vor Ort helfen (also Bedienungsfehler oder defekter Akku) mit $P(D) = 0,5$.

E : Bedienungsfehler liegt vor.

$$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 60 \%$$

Wenn (bekannt ist, dass) die Kundenberater vor Ort helfen konnten, so liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % ein Bedienungsfehler vor.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.4 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{105}{150} = 0,7; \quad n = 150; \quad z = 1,96$$

$$\left[0,7 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot (1-0,7)}{150}}; 0,7 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot (1-0,7)}{150}} \right] = [0,6267; 0,7733]$$

Der Anteil der zufriedenen Kunden liegt mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit zwischen 62,7 % und 77,3 %.

Lösung A8

2.1 Bernoulliexperiment mit $n = 100$ und $p = 0,1$ und für eine „6“.

10 mal eine Sechs:

$$B_{100;0,1}(X = 10) = 0,1319 = 13,2 \% \text{ (WTR)}$$

Mindestens 16 Sechsen:

$$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) = 1 - 0,9601 = 0,0399 = 4 \% \text{ (WTR)}$$

2.2 Wegen der Angabe von 68,3 % muss das 1- σ -Intervall gebildet werden.

$$n = 100; \quad p = 0,1; \quad \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10; \quad z = 1$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0,9} = 3$$

1- σ -Intervall:

$$[10 - 1 \cdot 3; 10 + 1 \cdot 3] = [7; 13]$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % kommen mindestens 7 und höchstens 13 Sechsen in der Stichprobe vor.

2.3 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$$B_{n;0,1}(X \geq 1) \geq 0,95$$

$$1 - B_{n;0,1}(X = 0) \geq 0,95$$

$$B_{n;0,1}(X = 0) \leq 0,05$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n \leq 0,05$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,9^n \leq 0,05$$

$$0,9^n \leq 0,05$$

$$n \cdot \ln(0,9) \leq \ln(0,05)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9)} = 28,43$$

Es müssen mindestens 29 Würfe erfolgen.

2.4 Der Einsatz, den Tristan auf den Tisch legt, wird mit a (in EUR) bezeichnet.

Es gibt für Tristan vier verschiedene Spielausgänge:

1. Zwei Sechsen: Isolde verdoppelt den Einsatz a EUR zwei Mal. Tristan nimmt $4a$ EUR vom Tisch, wovon $3a$ EUR Gewinn sind.

$$P(6;6) = 0,1^2 = 0,01.$$

2. Sechs und andere Zahl: Isolde verdoppelt den Einsatz einmal und nimmt sich dann 2 EUR. Es bleiben $2a - 2$ EUR für Tristan, wovon $a - 2$ EUR Gewinn sind.

$$P(6;\overline{6}) = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09.$$

3. Andere Zahl und Sechs: Luisa nimmt sich zunächst 2 EUR und verdoppelt dann den Betrag auf dem Tisch, sodass Tristan $(a - 2) \cdot 2 = 2a - 4$ EUR vom Tisch nimmt, davon sind $a - 4$ EUR Gewinn.

$$P(\overline{6};6) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

4. Zwei andere Zahlen: Isolde nimmt sich insgesamt 4 EUR, sodass Tristan $a - 4$ EUR bleiben, dies entspricht einem Verlust von 4 EUR.

$$P(\overline{6}; \overline{6}) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

Berechnung des Erwartungswertes des Gewinns von Max:

$$E = 0,01 \cdot 3a + 0,09 \cdot (a - 2) + 0,09 \cdot (a - 4) + 0,81 \cdot (-4) = 0,21a - 3,78$$

Faires Spiel für $E = 0$:

$$0,21a - 3,78 = 0 \Rightarrow a = 18$$

Damit das Spiel fair ist, muss der Einsatz von Tristan 18 EUR betragen.