

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A1

1. Die Angabe „dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0,2$ ist.

- 1.1 A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag.“

Stichprobenumfang ist $n = 3$, die Zufallsvariabel $X = 1$ für einen Sturmtag.

$$P(A) = \binom{3}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384$$

B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.“

Stichprobenumfang ist $n = 7$, die Zufallsvariabel $X \geq 1$ für mindestens einen Sturmtag.

Es sei $\bar{B}$ das Gegenereignis von B , dann gilt:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 = 1 - 1 \cdot 0,8^7 \approx 0,79$$

- 1.2 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

C: „Der Gast erhält eine Rückerstattung wegen mehr als zwei Sturmtagen.“

D: „Der Gast erlebt genau drei Sturmtage.“

Damit ist

E: Der Gast erlebt genau drei Sturmtage unter der Bedingung (Voraussetzung) dass er eine Rückerstattung erhalten hat.

$$P(E) = P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

Es sei $\bar{C}$ das Gegenereignis von C mit $\bar{C}$: „weniger als drei Sturmtage“, dann gilt:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

$$= 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4 \right) \approx 0,148$$

$$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 \approx 0,115$$

Da $P(C)$ und $P(D)$ nur den Wert 0,115 gemeinsam haben, ist $P(C \cap D) = 0,115$.

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0,115}{0,148} \approx 0,775$$

Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 77,5 % genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

- 1.3.1 Der Hotelier geht von einer Bernoullikette aus mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ $p = 0,2$ für Sturmtag im Januar und dem Stichprobenumfang von $n = 310$ Sturmtagen im Januar in den nächsten 10 Jahren. Der Mittelwert ist damit:

$$\mu = n \cdot p = 310 \cdot 0,2 = 62$$

- 1.3.2 Es handelt sich um eine Bernoullikette

$$B_{310;0,2}(X \leq 49) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{310-i} \approx 0,0352$$

- 1.4 95 % Konfidenzintervall bezüglich 96 zufriedenen Gästen von 120 Gästen:

$$h = \frac{96}{120} = 0,8$$

$$\left[0,8 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}}; 0,8 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}} \right] = [0,728; 0,872]$$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Lösung A2

2. Die Angabe „dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0,2$ ist.

2.1 $P(A) = \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^7 \approx 0,21$

$P(B) = 0,8^3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 \approx 0,0131$

Es sei $\bar{C}$ „höchstens ein Sturmtag“ das Gegenereignis von C , dann gilt:

$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 \right) \approx 1 - 0,577 \approx 0,423$

- 2.2 Gesucht wird der Erwartungswert.

Der Hotelier verdient 500 € pro Gast, wenn höchstens zwei Sturmtage pro Woche auftreten, ansonsten verdient er nur 300 € pro Gast.

Berechnung für $P(X = 500 \text{ €})$

$P(X = 500) = \binom{7}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5 \approx 0,852$

Da in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Summe aller möglichen Ereignisse stets 1 ist, gilt somit für $P(X = 300) = 1 - P(X = 500) = 0,148$.

$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = 500 \cdot 0,852 + 300 \cdot 0,148 = 470,4 > 460$

Da der Erwartungswert mit 470,4 € größer ist als die vom Hotelier gesetzte Untergrenze von 460 €, kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

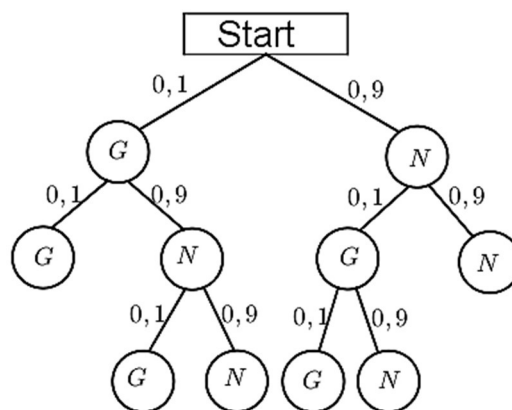
- 2.3 Im Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben, denn die gegebene Gleichung ist nichts anderes als die Auflösung der Bernoulliformel

$B_{x;0,2}(X \leq 1) = \binom{x}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^x + \binom{x}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{x-1} = 0,8^x + x \cdot 0,2 \cdot 0,8^{x-1}$

Anton darf für seinen nächsten Skiurlaub höchstens sechs Urlaubstage buchen.

Lösung A3

- 1.1 Baumdiagramm



Powered by GEOGEBRA.org

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 1.2 Es gibt die nachfolgenden Ergebnisse mit den jeweiligen Auszahlungen. Der Spieleinsatz sei a €.

$$P(G; G) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(G; N; G) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,009 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(G; N; N) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,081 \quad \text{Auszahlung } 100,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; G; G) = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,009 \quad \text{Auszahlung } 200,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; G; N) = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,081 \quad \text{Auszahlung } 100,00 \text{ €} - a \text{ €}$$

$$P(N; N) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81 \quad \text{Auszahlung } -a \text{ €}$$

Gesucht ist der Erwartungswert $E(X) = 0$

$$(200,00 - a) \cdot 0,01 + 2 \cdot (200,00 - a) \cdot 0,009 + 2 \cdot (100,00 - a) \cdot 0,081 - 0,81a = 0$$

$$2 - 0,01a + 3,60 - 0,018a + 16,20 - 0,162a - 0,81a = 0$$

$$21,8 = a$$

Das Autohaus muss einen Einsatz von 21,80 € verlangen, damit das Spiel fair ist.

- 1.3 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich „Genau drei Drehungen bis Spielende und mindestens ein Gewinn von 100 €.“

A: „Mindestens ein Gewinn von 100 €.“

B: „Genau drei Drehungen bis Spielende.“

$$P(A) = 0,1^2 + 2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,19$$

$$P(B) = 1 - (0,1^2 + 0,9^2) = 0,18$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,19} \approx 0,947$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.

- 1.4 C: „In einem Spiel genau 200 € gewonnen.“

$$P(C) = 0,1^2 + 2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,028$$

D: „Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal 200 € gewonnen.“

$$P(D) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{180}{k} \cdot 0,028^k \cdot 0,972^{180-k} \approx 0,013$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 Spielen mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden, beträgt etwa 1,3 %.

Lösung A4

- 2.1 Aufstellung der Ereigniswahrscheinlichkeiten für eine Vierfeldertafel:

A: „Kunde nimmt das Angebot „Wintercheck“ an.“

B: „Kunde nimmt das Angebot „Reifenwechsel“ an.“

$$P(A) = 0,6; \quad P(B) = 0,3 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,28$$

Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\bar{B}$	0,42	0,28	0,7
	0,6	0,4	1

Aus der Vierfeldertafel lesen wir ab:

C: Kunden, die beide Angebote annehmen:

$$P(C) = P(A \cap B) = 0,18$$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot:

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 2.2 Gesucht wird der Stichprobenumfang des Erwartungswertes $E(X) = 800$.

Sei die Anzahl der Kunden, die ein Angebot annehmen, dann gilt:

$$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0,6 + 9 \cdot n \cdot 0,3 = 800$$

$$n \approx 56,7$$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

- 2.3 Schätzer für p : $\frac{85}{1000} = 0,085$

$$0,085 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,085 \cdot 0,915}{1000}} \leq p \leq 0,085 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,085 \cdot 0,915}{1000}}$$

$$0,0762 \leq p \leq 0,0938 \text{ bzw. } 7,62 \% \leq p \leq 9,38 \%$$

Lösung A5

- 1.1 Bernoulliexperiment mit $n = 40$ und $p = 0,107$.

a) $B_{40;0,107}(X = 4) = 0,2037 \approx 20,4 \% \text{ (WTR)}$

b) $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,107 = 4,28$

$$B_{40;0,107}(X \geq 5) = 1 - B_{40;0,107}(X \leq 4) = 1 - 0,5713 = 0,4287 \approx 42,9 \% \text{ (WTR)}$$

c) $B_{40;0,107}(3 \leq X \leq 5) = B_{40;0,107}(X \leq 5) - B_{40;0,107}(X \leq 2) = 0,5633 \approx 56,3 \% \text{ (WTR)}$

- 1.2 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$$B_{n;0,107}(X \geq 1) \geq 0,8$$

$$1 - B_{n;0,107}(X = 0) \geq 0,8$$

$$B_{n;0,107}(X = 0) \leq 0,2$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,107^0 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,893^n \leq 0,2$$

$$n \cdot \ln(0,893) \leq \ln(0,2)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,893)} = 14,22$$

Es müssen mindestens 15 Schachteln eingesammelt werden.

- 1.3 Aus 100 Stangen (darunter 8 unverzollte) werden nacheinander 5 Stangen ohne Zurücklegen entnommen. $p = 0,08$ für unverzollte Ware.

Die Lieferung wird beschlagnahmt, wenn mindestens eine unverzollte Stange gefunden wird.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0,3468 \approx 34,7 \%$$

- 1.4 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{22}{200} = 0,11; \quad n = 200; \quad z = 1,64$$

$$\left[0,11 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}}; 0,11 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{200}} \right] = [0,0737; 0,1463]$$

Mit 90 %-iger Sicherheit liegt der Anteil an unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall zwischen 7,37 % und 14,63 %.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A6

2.1 Würfel 1: $P(1) = \frac{5}{12}$; $P(2) = \frac{3}{12}$; $P(5) = \frac{3}{12}$; $P(6) = \frac{1}{12}$

$$P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{768} = 0,0013$$

$$P(B) = 4! \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} = 24 \cdot \frac{5}{2304} = 0,0521$$

Marc's Behauptung "Alle Zahlen sind gleich" sei das Gegenereignis zu Ereignis B ist falsch.

Das Ereignis A: „Zahlenreihenfolge ist 5 – 6 – 2 – 2“ ist ebenfalls im Gegenereignis von B enthalten. Im Ereignis A sind nur **zwei**, nicht aber **alle** Zahlen gleich.

- 2.2 Bei vier Würfeln tritt die Sechs dann häufiger auf als die Eins, wenn die Sechs mindestens dreimal erscheint.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sechsen an.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 \\ &= 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0,1688 + 0,0301 = 0,1989 \approx 19,9 \% \end{aligned}$$

- 2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag von Jonas (J) an Marc (M).

x_i	-2	-5	-6	6
Ergebnisse	(M1;J2)	(M1;J5)	(M1;J6)	(M6;J6)
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{144}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{7}{48} - 5 \cdot \frac{7}{48} - 6 \cdot \frac{7}{144} + 6 \cdot \frac{55}{144} = 0,979$

Jonas zahlt durchschnittlich pro Spiel etwa 98 Cent an Marc.

Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

Lösung A7

- 1.1 Bernoullikette mit $n = 4$ und $p = 0,5$ für Hilfe vor Ort.

$$P(A) = B_{4;0,5}(X = 4) = 0,0625 = 6,25 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(B) = B_{4;0,5}(X = 1) = 0,4116 = 41,2 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(C) = B_{4;0,5}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,5}(X = 0) = 1 - 0,0625 = 0,9375 = 93,75 \% \text{ (WTR)}$$

- 1.2 Wie viele Reklamationen müssen mindestens erfolgen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 50 % mindestens 1 Betriebssystemfehler auftritt.

- 1.3 Fragestellung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Das Vorwissen, dass die Kundenberater vor Ort helfen konnten, wird als Ereignis D bezeichnet.

D : Kundenberater kann vor Ort helfen (also Bedienungsfehler oder defekter Akku) mit $P(D) = 0,5$.

E : Bedienungsfehler liegt vor.

$$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 60 \%$$

Wenn (bekannt ist, dass) die Kundenberater vor Ort helfen konnten, so liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % ein Bedienungsfehler vor.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.4 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{105}{150} = 0,7; \quad n = 150; \quad z = 1,96$$

$$\left[0,7 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot (1-0,7)}{150}}; 0,7 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot (1-0,7)}{150}} \right] = [0,6267; 0,7733]$$

Der Anteil der zufriedenen Kunden liegt mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit zwischen 62,7 % und 77,3 %.

Lösung A8

2.1 Bernoulliexperiment mit $n = 100$ und $p = 0,1$ und für eine „6“.

10 mal eine Sechs:

$$B_{100;0,1}(X = 10) = 0,1319 = 13,2 \% \text{ (WTR)}$$

Mindestens 16 Sechsen:

$$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) = 1 - 0,9601 = 0,0399 = 4 \% \text{ (WTR)}$$

2.2 Wegen der Angabe von 68,3 % muss das 1- σ -Intervall gebildet werden.

$$n = 100; \quad p = 0,1; \quad \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10; \quad z = 1$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0,9} = 3$$

1- σ -Intervall:

$$[10 - 1 \cdot 3; 10 + 1 \cdot 3] = [7; 13]$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % kommen mindestens 7 und höchstens 13 Sechsen in der Stichprobe vor.

2.3 Gesucht ist der Stichprobenumfang.

$$B_{n;0,1}(X \geq 1) \geq 0,95$$

$$1 - B_{n;0,1}(X = 0) \geq 0,95$$

$$B_{n;0,1}(X = 0) \leq 0,05$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n \leq 0,05$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0,9^n \leq 0,05$$

$$0,9^n \leq 0,05$$

$$| \quad \ln$$

$$n \cdot \ln(0,9) \leq \ln(0,05)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9)} = 28,43$$

Es müssen mindestens 29 Würfe erfolgen.

2.4 Der Einsatz, den Tristan auf den Tisch legt, wird mit a (in EUR) bezeichnet.

Es gibt für Tristan vier verschiedene Spielausgänge:

1. Zwei Sechsen: Isolde verdoppelt den Einsatz a EUR zwei Mal. Tristan nimmt $4a$ EUR vom Tisch, wovon $3a$ EUR Gewinn sind.

$$P(6;6) = 0,1^2 = 0,01.$$

2. Sechs und andere Zahl: Isolde verdoppelt den Einsatz einmal und nimmt sich dann 2 EUR. Es bleiben $2a - 2$ EUR für Tristan, wovon $a - 2$ EUR Gewinn sind.

$$P(6;\overline{6}) = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09.$$

3. Andere Zahl und Sechs: Luisa nimmt sich zunächst 2 EUR und verdoppelt dann den Betrag auf dem Tisch, sodass Tristan $(a - 2) \cdot 2 = 2a - 4$ EUR vom Tisch nimmt, davon sind $a - 4$ EUR Gewinn.

$$P(\overline{6};6) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

4. Zwei andere Zahlen: Isolde nimmt sich insgesamt 4 EUR, sodass Tristan $a - 4$ EUR bleiben, dies entspricht einem Verlust von 4 EUR.

$$P(\overline{6}; \overline{6}) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

Berechnung des Erwartungswertes des Gewinns von Max:

$$E = 0,01 \cdot 3a + 0,09 \cdot (a - 2) + 0,09 \cdot (a - 4) + 0,81 \cdot (-4) = 0,21a - 3,78$$

Faires Spiel für $E = 0$:

$$0,21a - 3,78 = 0 \Rightarrow a = 18$$

Damit das Spiel fair ist, muss der Einsatz von Tristan 18 EUR betragen.