# Abituraufgaben Stochastik BG *(Teil 3 mit Hilfsmittel)* 2017-2019

## Aufgabe A1/2017

Beim Strafstoß (Elfmeter) gibt es drei mögliche Ereignisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.
(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.
(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von $80\,\%$ ein Tor.

1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: (5P)
$A$: Er erzielt vier Tore.
$B$: Er erzielt mindestens drei Tore.
$C$: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an: (5P)
„Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir $10$ Euro geben."
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

1.3 In einer Fußballliga wird mit $87\,\%$ aller Strafstöße ein Tor erzielt. $10\,\%$ der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt. (2P)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

1.3.2 In iner Saison werden $70$ Strafstöße gegeben. (3P)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens $68$ Tore erzielt werden.

## Aufgabe A2/2017

An einem Kiosk kann man Rubbellose kaufen. Ein Los besteht aus insgesamt 16 Feldern. Auf jedem Feld steht genau eine Zahl.
Auf acht Feldern steht die Zahl 0, auf vier Feldern die Zahl 1 und auf den restlichen vier Feldern die Zahl 5.
Die Zahlen sind zufällig auf die Felder verteilt.
Die Felder sind von einer undurchsichtigen Schicht überzogen, sodass die Zahlen erst durch Rubbeln der Felder sichtbar werden.

Rubbeln und gewinnen !

| | | | |
|---|---|---|---|
| € | € | € | € |
| € | 0 | € | € |
| € | € | € | € |
| € | € | 5 | € |

Der Käufer eines Loses muss genau zwei Felder aufrubbeln (vgl. Abbildung). Das Produkt der Zahlen, die hierbei sichtbar werden, ist der Betrag in Euro, die der Kioskbetreiber an den Losbesitzer auszahlen muss.

2.1 Eine Frau kauft ein Rubbellos und rubbelt genau zwei Felder frei. (3P)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten er folgenden Ereignisse:
$A$: Genau ein frei gerubbeltes Feld zeigt die Zahl $5$.
$B$: Die Frau bekommt mindestens einen Euro ausgezahlt.

2.2 Ein Mann kauft an fünf Tage in Folge jeweils ein Los. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mann genau zweimal $25$ Euro erhält. (3P)

2.3 Der Kioskbetreiber kauft die Lose für $20$ Cent je Stück ein und verkauft ein Los für $2{,}50$ Euro. Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns pro Los, den der Kioskbetreiber im Mittel erwarten kann. (4P)

2.4 Ein Kioskbetreiber notiert immer am Ende des Tages die Anzahl der an diesem Tag verkauften Rubbellose. Ein Student, der als Aushilfe am Kiosk arbeitet, wertet diese Daten aus: Im Mittel werden $17$ Lose pro Tag verkauft, wobei die Standardabweichung $4$ beträgt. (5P)

Der Student macht folgende Annahmen:
(1) Die Anzahl $n$ der Kunden, die den Kiosk aufsuchen, ist an jedem Tag gleich.
(2) Die Kunden kaufen unabhängig voneinander entweder genau ein oder aber kein Rubbellos.

Bestimmen Sie den Wert für $n$, den der Student unter der Annahme Einer Binomialverteilung ermittelt.

Welche Information liefert die Sigma-Regel $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 68{,}3\,\%$ dem Studenten in diesem Sachzusammenhang?

## Aufgabe A1/2018

1 Bei einem $10\ km$ Lauf werden die Läufer auf halber Strecke an einem Stand versorgt. Die Organisatoren bieten jedem Läufer jeweils genau einen Becher Wasser und ein Stück Obst als Versorgung an.
Aufgrund der Erfahrung aus früheren Wettbewerben nimmt man folgende Wahrscheinlichkeiten an:
- $80\,\%$ der Läufer nehmen einen Becher Wasser;
- $30\,\%$ der Läufer nehmen ein Stück Obst;
- $5\,\%$ der Läufer nehmen nur ein Stück Obst und kein Wasser.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
$A$: Von fünf Läufern nehmen genau vier Läufer einen Becher Wasser.
$B$: Von sechs Läufern nehmen mindestens zwei Läufer ein Stück Obst.
$C$: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst. (7P)

1.2 Beurteilen Sie folgende Aussage:
„Wenn ein Läufer einen Becher Wasser zu sich nimmt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er dann auch ein Stück Obst zu sich nimmt, mehr als $30\,\%$.“ (3P)

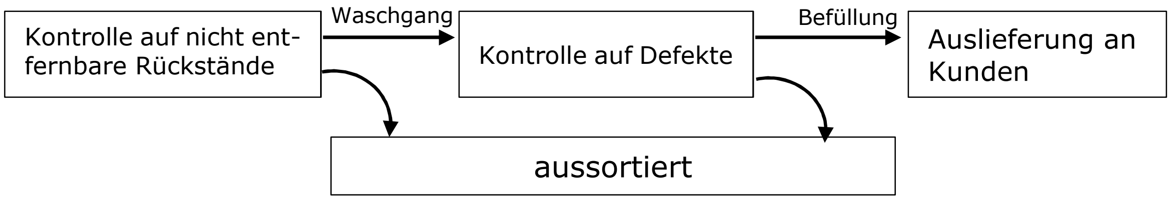
1.3 Insgesamt nehmen an dem Lauf $2500$ Läufer teil.

1.3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als $2050$ Läufer einen Becher Wasser nehmen. (2P)

1.3.2 Nach dem Lauf sollen die Wahrscheinlichkeiten überprüft werden, die aus der Erfahrung der früheren Wettbewerbe resultierten.
Tatsächlich haben genau 1950 Läufer einen Becher Wasser genommen.
Fassen Sie dieses Ergebnis als Stichprobe auf.
Prüfen Sie, ob die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von $80\,\%$ in dem zugehörigen Vertrauensintervall mit Vertrauenswahrscheinlichkeit $99\,\%$ liegt, das sich aus der Stichprobe ergibt. (3P)

## Aufgabe A2/2018

2 Der Mineralwasserproduzent „Sauberwasser" muss zurückgegebene PET Pfandflaschen von einer erneuten Befüllung auf nicht entfernbare Rückstände sowie auf Defekte (wie Risse) untersuchen und gegebenenfalls direkt nach der jeweiligen Kontrolle aussortieren. Der Prozessablauf, den jede einzelne Flasche durchläuft, ist im Folgenden dargestellt:




2.1 Beim Produzenten Sauberwasser weiß man:
- $99\,\%$ aller Flaschen durchlaufen den Waschgang
- $96\,\%$ aller Flaschen werden befüllt, haben also weder nicht entfernbare Rückstände noch einen Defekt

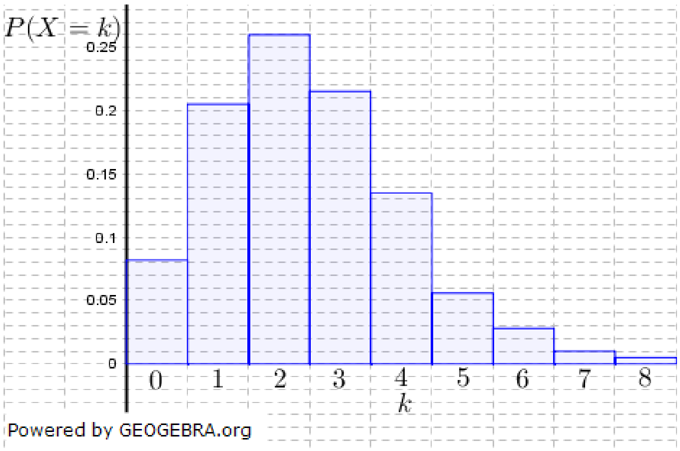
2.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
$E1$: Von 5 Flaschen werden 5 befüllt.
$E2$: Von 15 Flaschen wird genau eine Flasche nicht befüllt.
$E3$: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
$E4$: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen. (7P)

2.1.2 Bestimmen Sie, wie viele Flaschen mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ mindestens eine Flasche vorzufinden, die nicht befüllt wird. (3P)

2.2 Trotz aller Qualitätskontrollen können nicht alle fehlerhaften Flaschen erkannt werden. Erfahrungsgemäß sind $0{,}5\,\%$ aller ausgelieferten Flaschen fehlerhaft.
Der Produzent Sauberwasser kontrolliert vor der Auslieferung an die Kunden bei einer Stichprobe $500$ Flaschen auf Fehler.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl $X$ der fehlerhaften Flaschen dieser Stichprobe.

Im Diagramm ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ dargestellt.
Bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Flaschen im $\sigma$-Intervall des Erwartungswerts liegt.

Nennen Sie einen Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel.




## Aufgabe A1/2019

1 In Baden-Württemberg tragen $3{,}5\,\%$ aller Zecken FSME-Viren in sich. Diese Viren werden durch Bisse der Zecken auf den Menschen übertragen.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E1: „Von $20$ zufällig ausgewählten Zecken trägt keine einzige FSME-Viren in sich.“
E2 : „Von $50$ zufällig ausgewählten Zecken trägt höchstens eine FSME-Viren in sich.“
E3 : „Von 100 zufällig ausgewählten Zecken tragen mindestens vier FSME-Viren in sich.“ (6P)

1.2 Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist: Das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen übersteigt in Baden-Württemberg erst dann $60\,\%$, wenn man dort von mindestens $25$ Zecken gebissen wird. (3P)

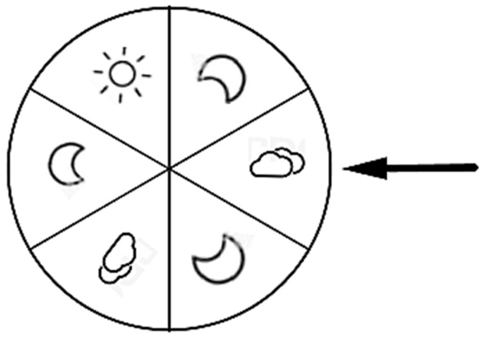
1.3 Die angegebene Wahrscheinlichkeit von $3{,}5\,\%$ mit der die Zecke FSME-Viren in sich trägt, stellt einen Durchschnittswert für ganz Baden-Württemberg dar. In allen Regionen wurden Stichproben genommen und die dortigen relativen Häufigkeiten berechnet. Je dunkler die Region in der Karte dargestellt ist, desto höher sind die relativen Häufigkeiten dafür, dass die Zecken FSME-Viren in sich tragen.
Für die Regionen $A$ und $B$ wurde jeweils ein $95\,\%$-Vertrauensintervall für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Zecke dort FSME-Viren in sich trägt, bestimmt. Für die Stichprobe in der Region $A$ ist bekannt, dass $2000$ Zecken getestet wurden.


1.3.1 Bei der Stichprobe in der Region $A$ stellte man fest, dass $58$ Zecken FSME-Viren in sich tragen. Geben Sie das näherungsweise bestimmte $95\,\%$-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. (3P)

1.3.2 Bei der Prüfung der Stichproben wird festgestellt, dass die Längen der Vertrauensintervalle für die beiden Regionen $A$ und $B$ übereinstimmen, in Region $B$ jedoch eine größere relative Häufigkeit als in Region $A$ vorliegt (siehe Karte).
Erläutern Sie, was dies für den Umfang der Stichprobe in Region $B$ bedeutet. (3P)

## Aufgabe A2/2019

2 Das abgebildete Glücksrad besteht aus sechs gleich großen Sektoren. Wird das Glücksrad gedreht, so zeigt der Pfeil beim Stillstand auf genau einen Sektor.
Bei einem Fest wird folgendes Spiel angeboten:
Zeigt der Pfeil auf Sonne oder Mond dreht man ein weiteres Mal. Das Spiel endet, wenn der Pfeil auf Wolke zeigt oder der Spieler das Rad schon dreimal gedreht hat. Jeder Spieler darf das Spiel nur einmal spielen.

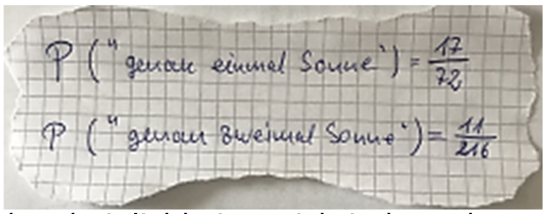


Powered by GEOGEBRA.org

2.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
$A$: „Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad."
$B$: „Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond." (4P)

2.2 Ein Spiel endet mit Wolke. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler dann keinmal Sonne gedreht hat. (4P)

2.3 Der Besitzer des Glücksrads nimmt vor jedem Spiel einen Euro Einsatz vom Spieler. Immer dann, wenn der Spieler Sonne dreht, bekommt er einen Euro ausgezahlt.
Ansonsten geht er leer aus.




Die Frau des Besitzers hat einige Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet und auf einen Zettel geschrieben.

2.3.1 Berechnen Sie den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann. (4P)

2.3.2 Der Besitzer des Glücksrads fragt sich, wie viele Spieler genau einen Euro ausgezahlt bekommen, wenn genau $140$ Spieler das Spiel spielen.
Die Frau des Besitzers meint, es wären mehr als $30$, aber weniger als $40$.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau des Besitzers recht hat. (3P)

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) 2017-2019

## Lösung A1/2017

1.1 Ereignisse $A$ und $B$ sind Bernoulli-Experimente mit $P(Tor) = 0{,}8$, $n = 4$, die Zufallsvariable $X$ beschreibt die Anzahl der geschossenen Tore.

$P(A) = B_{4;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}4096$

$P(B) = B_{4;0,8}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,8}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8192$

Ereignis $C$:

$\Omega = \{TorTorTor\overline{Tor}; \overline{Tor}TorTorTor\}$

$P(C) = 2 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}2048$

1.2 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $p$ für die Ballabwehr durch den Torhüter für den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die Zufallsvariable $X$ beschreibt den Gewinn von Tom. Sie kann die folgenden Werte annehmen:

$X = 1$ €: Tom erzielt ein Tor;
$X = -2$ €: Torgüter wehrt den Ball ab;
$X = -10$ €: Tom trifft Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Es gilt:

$P(X = 1) = 0{,}8;\quad P(X = -2) = p;\quad P(X = -10) = 1 - 0{,}8 - p$

$E(X) = 1 \cdot 0{,}8 - 2 \cdot p - 10 \cdot (0{,}2 - p) = -1{,}2 + 8p$

Das Spiel soll fair sein, also $E(X) = 0$:

$-1{,}2 + 8p = 0$

$8p = 1{,}2 \implies p = 0{,}15$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehren muss, damit das Spiel fair ist, beträgt $15\,\%$.

1.3.1 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

$B$: Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt unter der Bedingung dass
$A$: der Torhüter den Ball abwehrt.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}13} = \frac{10}{13} \approx 0{,}769$

1.3.2 Die Zufallsvariable $X$ beschreibt die Anzahgl erzielter Tore. $X$ ist binomialverteilt mit $n = 70$ und $p = 0{,}87$.

$B_{70;0,87}(X \geq 68) = 1 - B_{70;0,87}(X \leq 67) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0038$

## Lösung A2/2017

2.1 Die Felder sind wie folgt beschriftet:

Zahl $0$: 8 Felder
Zahl $1$: 4 Felder
Zahl $5$: 4 Felder

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

$P(A) = P\big(5\overline{5}; \overline{5}5\big) = 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = 0{,}4$

$P(B) = P(11; 15; 51; 55) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{12+32+12}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$

2.2 Die Zufallsvariable $X$ gibt die Anzahl an, genau $25$ Euro zu gewinnen. $X$ ist binomialverteilt mit $n = 5$ (5 Tage jeweils ein Los) und $p = \frac{1}{20}$ (Wahrscheinlichkeit für zwei 5en).

$B_{5;0,05}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0214$

2.3 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

| $x_i$ | $22{,}50$ € | $2{,}50$ € | $-1{,}50$ € | $-2{,}50$ € |
|---|---|---|---|---|
| Ergebnisse | (55) | (15;51) | (11) | alle anderen |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$ | $2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$ | $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$ | $\frac{23}{30}$ |

Erwartungswert: $E(X) = 22{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} + 2{,}50\,€ \cdot \frac{2}{15} - 1{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} - 2{,}50\,€ \cdot \frac{23}{30} = -0{,}53\,€$
Der Erwartungswert ist um $0{,}20$ € zu erhöhen (Einkauspreis eines Loses).
$E(X) + 0{,}20 = -0{,}33$.
Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von $0{,}33$ € pro Spiel rechnen.

2.4 Die Zufallsvariable $X$ beschreibt die Anzahl der Kiosk-Kunden, die ein Los kaufen. $X$ ist binomialverteilt mit den unbekannten Parametern $n$ und $p$.
Es ist jedoch bekannt:

(1) $\mu = n \cdot p = 17$

(2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4$

(1) $n = \frac{17}{p}$

$n \longrightarrow (2)$

(2) $\sqrt{\frac{17}{p} \cdot p \cdot (1 - p)} = 4$

$17 \cdot (1 - p) = 16$

$p = \frac{1}{17}$

$p \longrightarrow (1)$

(1) $n = \frac{17}{\frac{1}{17}} = 289$

*Der Kiosk wird täglich von $289$ Kunden besucht.*

Die Sigmaregel $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ ergibt mit $\mu = 17$ und $\sigma = 4$:
$P(13 \le X \le 21) \approx 68{,}3\,\%$.

*Diese Wahrscheinlichkeit gibt an, dass die Wahrscheinlichkeit ca. $68{,}3\,\%$ beträgt, dass an einem Tag zwischen $13$ und $21$ Kunden ein Los kaufen.*

*Abituraufgaben Stochastik BG* *(Teil 3 mit Hilfsmittel)* *2017-2019*

## Lösung A1/2018

1.1 Ereignisse $A$ und $B$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(A) = B_{5;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}4096$

$P(B) = B_{6;0,3}(X \geq 2) = 1 - B_{6;0,3}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}5798$

$C$: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst.
Lösung über Vierfeldertafel:

| | Obst ($O$) | Kein Obst ($\overline{O}$) | |
|---|---|---|---|
| Wasser ($W$) | $0{,}25$ | $0{,}55$ | $\mathbf{0{,}8}$ |
| Kein Wasser ($\overline{W}$) | $\mathbf{0{,}05}$ | $0{,}15$ | $0{,}2$ |
| | $\mathbf{0{,}3}$ | $0{,}7$ | $\mathbf{1}$ |

$P(C) = P(W \cap \overline{O}) = 0{,}55$

1.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Läufer Obst nimmt unter der Bedingung, dass er schon einen Becher Wasser genommen hat.

$P_W(O) = \frac{P(W \cap O)}{P(W)} = \frac{0{,}25}{0{,}8} = 0{,}3125 > 0{,}30$

Die Aussage ist korrekt, denn $31{,}25\ \%$ ist größer als $30\ \%$.

1.3.1 $B_{2500;0,8}(X > 2500) = 1 - B_{2500;0,8}(X \leq 2050) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0053$

1.3.2 Relative Trefferhäufigkeit: $h = \frac{1950}{2500} = 0{,}78$

Berechnung des Vertrauensintervalls mit $c = 2{,}58$ (aufgrund der Vertrauenswahrscheinlichkeit von 99 %) und $n = 2500$.

$I = \left[0{,}78 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}78 \cdot (1 - 0{,}78)}{2500}}; 0{,}78 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}78 \cdot (1 - 0{,}78)}{2500}}\right]$

$I = [0{,}7586; 0{,}8014] = [75{,}86\ \%; 80{,}14\ \%]$

*Die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von* $80\ \%$ *ist in dem Vertrauensintervall enthalten.*

## Lösung A2/2018

2.1.1 Ereignisse $E1$ und $E2$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{5;0,96}(x = 5) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}815$

$P(E2) = B_{15;0,04}(x = 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}339$

$E3$: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird befüllt unter der Bedingung, dass sie gewaschen wurde.

$P(E3) = P_{gew}(bef) = \frac{P(gew \cap bef)}{P_{gew}} = \frac{0{,}96}{0{,}99} \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}97$

*Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt* $0{,}97$ *bzw.* $97\ \%$.

$E4$: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird nicht befüllt unter der Bedingung, dass sie nicht gewaschen wurde.

$$P(E4) = P_{\overline{bef}}(\overline{gew}) = \frac{P(\overline{bef} \cap \overline{gew})}{P_{\overline{bef}}} = \frac{0{,}01}{0{,}04} \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}25$$

*Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt* $0{,}25$ *bzw.* $25\,\%$.

2.1.2 $B_{n;0,04}(x \geq 1) > 0{,}9$

$1 - B_{n;0,04}(X = 0) > 0{,}9 \qquad | \qquad +B_{n;0,04}(X = 0);\ -0{,}9$

$1 - 0{,}9 > B_{n;0,04}(X = 0)$

$0{,}1 > \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}96^n$

$ln\,(0{,}1) > n \cdot ln\,(0{,}96) \qquad | \qquad : ln\,(0{,}96)$

$n > \frac{ln\,(0{,}1)}{ln\,(0{,}96)}$

$n > 56{,}4$

*Es müssen mindestens* $57$ *Flaschen kontrolliert werden.*

2.2 Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}005 = 2{,}5$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{2{,}5 \cdot 0{,}995} = 1{,}5772$

$1 \cdot \sigma$-Intervall (zum Erwartungswert):

$[2{,}5 - 1{,}5772; 2{,}5 + 1{,}5772] \ \rightarrow \ [0{,}9228; 4{,}0772]$

Wahrscheinlichkeit für $X$ mit Rechner:

$P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8101$

Wahrscheinlichkeit für $X$ über Diagramm:

$P(X \leq 4) - P(X = 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}815$

*Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel*:
Die 1-Sigma-Regel besagt einen Wert von ca. $68\,\%$, für diesen Vorgang ein sehr ungenaues Ergebnis der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit.
*Ein Grund für diese Ungenauigkeit ist, dass die Bedingung* $\sigma > 3$ *hier nicht erfüllt ist.*

## Lösung A1/2019

1.1 Ereignisse $E1$ bis $E3$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{20;0,035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}49$

$P(E2) = B_{50;0,035}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}47$

$P(E3) = B_{100;0,035}(X \geq 4) = 1 - B_{100;0,035}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}465$

1.2 Mindestens eine Zecke von $25$ muss den FSME-Virus tragen, sonst wird man ja damit nicht angesteckt.

$B_{25;0,035}(X \geq 1) = 1 - B_{25;0,035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}59$

*Die Aussage ist nicht wahr, da bei genau 25 Zeckenbissen 60% noch nicht erreicht sind.*

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) 2017-2019

1.3.1 Stichprobenumfang $n = 2000$; relative Häufigkeit $h = \frac{58}{2000} = 0{,}029$;
Sicherheitsniveau $c = 1{,}96$.
Vertrausensintervall: $\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$ (siehe Merkhilfe)

$$\left[0{,}029 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}; 0{,}029 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}\right] = [0{,}0216; 0{,}0364]$$

Interpretation:
*Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke in Region $A$ FSME-Viren in sich trägt im Intervall $[0{,}0216; 0{,}0364]$.*

1.3.2 *Erläutern der Bedeutung des Ergebnisses 1.3.1 für den Umfang der Stichprobe in Region $B$:*
Die Länge $L$ eines Vertrauensintervalls beträgt $2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$.
Ist in Region $B$ (nach Aufgabenstellung) $h$ größe, so wird auch der Ausdruck $h \cdot (1-h)$ unter der Wurzel größer. Damit wird der gesamte Ausdruck größer.
Begründung:
Die Funktion $g(h) = h \cdot (1-h) = h - h^2$ hat das Schaubild einer nach unten geöffneten Parabel mit der Scheitelachse $h = 0{,}5$.
Für $0 < h < 0{,}5$ ist die Funktion $g(h)$ streng monoton wachsend.
Da die Länge $L$ gleich bleiben soll, muss der Nenner des Bruches unter der Wurzel wachsen, wenn der Zähler größer wird.
Fazit:
*In der Region $B$ wurden daher mehr als $2000$ Zecken untersucht.*

## Lösung A2/2019

2.1 Sei $W$=Wolke, $S$=Sonne und $M$=Mond.
$A$: „Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad."
Dieses Ereignis tritt auf, wenn das Glücksrad beim dritten Drehen „$W$" zeigt oder dreimal „$\overline{W}$" erscheint.
$P(A) = P\left(\overline{WW}W\right) + P\left(\overline{WWW}\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$
$B$: „Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond."
Der folgende Ergebnisraum ist möglich:
$\Omega = \{MM\overline{M}; MSM; SMM\}$
Hinwies:
In den Ereignissen $MSM$ und $SMM$ kann nicht $\overline{M}$ verwendet werden, da darin die Wolke enthalten ist und das Spiel somit zu Ende wäre.
$P(B) = P\left(MM\overline{M}\right) + P(MSM) + P(SMM) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$

2.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Sonne erscheint unter der Bedingung, dass das Spiel mit Wolke endet.
$C$: „Das Spiel endet mit Wolke."
$D$: „Es erscheint keine Sonne."

$P(C) = P(W; \overline{W}W; \overline{WW}W) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{19}{27}$
$P(D) = P(W; MW; MMW)$
$P(C \cap D) = P(W; MW; MMW) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{12}$
$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{19}{27}} = \frac{63}{76} \approx 0{,}829$

2.3.1 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

| $x_i$ | $2\,€$ | $1\,€$ | $0\,€$ | $-1\,€$ |
|---|---|---|---|---|
| Ereignis | ☼☼☼ | ☼☼ | ☼ | alle anderen |
| $P(X = x_i)$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ | $\frac{11}{216}$ | $\frac{51}{216}$ | $\frac{153}{216}$ |

Erwartungswert: $E(X) = 2\,€ \cdot \frac{1}{216} + 1\,€ \cdot \frac{11}{216} - 1\,€ \cdot \frac{153}{216} = -\frac{35}{54}\,€ \approx -0{,}65\,€$
*Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von* $0{,}65\,€$ *pro Spiel rechnen.*

2.3.2 Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für $30 \leq X \leq 40$ der Auszahlung von $1\,€$:
Binomialverteilung mit

$B_{140;\frac{17}{72}}(31 \leq X \leq 39) = B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 39) - B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 30) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}588$
*Die Frau des Besitzers liegt mit ihrer Antwort mit etwa* $59\,\%$ *richtig.*