Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Lösung A1/2017

1.1 Ereignisse A und B sind Bernoulli-Experimente mit $P(Tor) = 0{,}8$, $n = 4$, die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der geschossenen Tore.

$P(A) = B_{4;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}4096$

$P(B) = B_{4;0,8}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,8}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8192$

Ereignis C:

$\Omega = \{TorTorTor\overline{Tor}; \overline{Tor}TorTorTor\}$

$P(C) = 2 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}2048$

1.2 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p für die Ballabwehr durch den Torhüter für den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn von Tom. Sie kann die folgenden Werte annehmen:

$X = 1$ €: Tom erzielt ein Tor;
$X = -2$ €: Torgüter wehrt den Ball ab;
$X = -10$ €: Tom trifft Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Es gilt:

$P(X = 1) = 0{,}8;\quad P(X = -2) = p;\quad P(X = -10) = 1 - 0{,}8 - p$

$E(X) = 1 \cdot 0{,}8 - 2 \cdot p - 10 \cdot (0{,}2 - p) = -1{,}2 + 8p$

Das Spiel soll fair sein, also $E(X) = 0$:

$-1{,}2 + 8p = 0$

$8p = 1{,}2 \implies p = 0{,}15$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehren muss, damit das Spiel fair ist, beträgt $15\,\%$.

1.3.1 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

B: Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt unter der Bedingung dass
A: der Torhüter den Ball abwehrt.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}13} = \frac{10}{13} \approx 0{,}769$

1.3.2 Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahgl erzielter Tore. X ist binomialverteilt mit $n = 70$ und $p = 0{,}87$.

$B_{70;0,87}(X \geq 68) = 1 - B_{70;0,87}(X \leq 67) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0038$

Lösung A2/2017

2.1 Die Felder sind wie folgt beschriftet:
Zahl 0: 8 Felder
Zahl 1: 4 Felder
Zahl 5: 4 Felder
Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

$P(A) = P(5\overline{5}; \overline{5}5) = 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = 0{,}4$

$P(B) = P(11; 15; 51; 55) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{12+32+12}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$

2.2 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an, genau 25 Euro zu gewinnen. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ (5 Tage jeweils ein Los) und $p = \frac{1}{20}$ (Wahrscheinlichkeit für zwei 5en).

$B_{5;0,05}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0214$

2.3 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

x_i	$22{,}50$ €	$2{,}50$ €	$-1{,}50$ €	$-2{,}50$ €
Ergebnisse	(55)	(15;51)	(11)	alle anderen
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$	$2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$	$\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$	$\frac{23}{30}$

Erwartungswert: $E(X) = 22{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} + 2{,}50\,€ \cdot \frac{2}{15} - 1{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} - 2{,}50\,€ \cdot \frac{23}{30} = -0{,}53\,€$
Der Erwartungswert ist um $0{,}20$ € zu erhöhen (Einkauspreis eines Loses).
$E(X) + 0{,}20 = -0{,}33$.
Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von $0{,}33$ € pro Spiel rechnen.

2.4 Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Kiosk-Kunden, die ein Los kaufen. X ist binomialverteilt mit den unbekannten Parametern n und p.
Es ist jedoch bekannt:
(1) $\mu = n \cdot p = 17$
(2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4$
(1) $n = \frac{17}{p}$
$n \longrightarrow (2)$
(2) $\sqrt{\frac{17}{p} \cdot p \cdot (1-p)} = 4$
$17 \cdot (1-p) = 16$
$p = \frac{1}{17}$
$p \longrightarrow (1)$
(1) $n = \frac{17}{\frac{1}{17}} = 289$
Der Kiosk wird täglich von 289 *Kunden besucht.*

Die Sigmaregel $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ ergibt mit $\mu = 17$ und $\sigma = 4$:
$P(13 \leq X \leq 21) \approx 68{,}3\,\%$.

Diese Wahrscheinlichkeit gibt an, dass die Wahrscheinlichkeit ca. $68{,}3\,\%$ *beträgt, dass an einem Tag zwischen* 13 *und* 21 *Kunden ein Los kaufen.*

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Lösung A1/2018

1.1 Ereignisse A und B sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(A) = B_{5;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0,4096$

$P(B) = B_{6;0,3}(X \geq 2) = 1 - B_{6;0,3}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0,5798$

C: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst.
Lösung über Vierfeldertafel:

	Obst (O)	Kein Obst ($\overline{O}$)	
Wasser (W)	0,25	0,55	**0,8**
Kein Wasser ($\overline{W}$)	**0,05**	0,15	0,2
	0,3	0,7	**1**

$P(C) = P(W \cap \overline{O}) = 0,55$

1.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Läufer Obst nimmt unter der Bedingung, dass er schon einen Becher Wasser genommen hat.

$P_W(O) = \frac{P(W \cap O)}{P(W)} = \frac{0,25}{0,8} = 0,3125 > 0,30$

Die Aussage ist korrekt, denn $31,25\ \%$ ist größer als $30\ \%$.

1.3.1 $B_{2500;0,8}(X > 2500) = 1 - B_{2500;0,8}(X \leq 2050) \overset{\text{WTR}}{=} 0,0053$

1.3.2 Relative Trefferhäufigkeit: $h = \frac{1950}{2500} = 0,78$

Berechnung des Vertrauensintervalls mit $c = 2,58$ (aufgrund der Vertrauenswahrscheinlichkeit von 99 %) und $n = 2500$.

$$I = \left[0,78 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,78 \cdot (1 - 0,78)}{2500}}; 0,78 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,78 \cdot (1 - 0,78)}{2500}}\right]$$

$I = [0,7586; 0,8014] = [75,86\ \%; 80,14\ \%]$

Die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von $80\ \%$ ist in dem Vertrauensintervall enthalten.

Lösung A2/2018

2.1.1 Ereignisse $E1$ und $E2$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{5;0,96}(x = 5) \overset{\text{WTR}}{=} 0,815$

$P(E2) = B_{15;0,04}(x = 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0,339$

$E3$: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird befüllt unter der Bedingung, dass sie gewaschen wurde.

$P(E3) = P_{gew}(bef) = \frac{P(gew \cap bef)}{P_{gew}} = \frac{0,96}{0,99} \overset{\text{WTR}}{=} 0,97$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $0,97$ bzw. $97\ \%$.

$E4$: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird nicht befüllt unter der Bedingung, dass sie nicht gewaschen wurde.

$$P(E4) = P_{\overline{bef}}(\overline{gew}) = \frac{P(\overline{bef} \cap \overline{gew})}{P_{\overline{bef}}} = \frac{0{,}01}{0{,}04} \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}25$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $0{,}25$ *bzw.* $25\,\%$.

2.1.2 $B_{n;0,04}(x \geq 1) > 0{,}9$

$1 - B_{n;0,04}(X = 0) > 0{,}9 \qquad | \qquad +B_{n;0,04}(X = 0);\ -0{,}9$

$1 - 0{,}9 > B_{n;0,04}(X = 0)$

$0{,}1 > \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}96^n$

$ln\,(0{,}1) > n \cdot ln\,(0{,}96) \qquad | \qquad :ln\,(0{,}96)$

$n > \frac{ln\,(0{,}1)}{ln\,(0{,}96)}$

$n > 56{,}4$

Es müssen mindestens 57 *Flaschen kontrolliert werden.*

2.2 Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}005 = 2{,}5$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{2{,}5 \cdot 0{,}995} = 1{,}5772$

$1 \cdot \sigma$-Intervall (zum Erwartungswert):

$[2{,}5 - 1{,}5772; 2{,}5 + 1{,}5772] \rightarrow [0{,}9228; 4{,}0772]$

Wahrscheinlichkeit für X mit Rechner:

$P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8101$

Wahrscheinlichkeit für X über Diagramm:

$P(X \leq 4) - P(X = 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}815$

Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel:
Die 1-Sigma-Regel besagt einen Wert von ca. $68\,\%$, für diesen Vorgang ein sehr ungenaues Ergebnis der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit.
Ein Grund für diese Ungenauigkeit ist, dass die Bedingung $\sigma > 3$ *hier nicht erfüllt ist.*

Lösung A1/2019

1.1 Ereignisse $E1$ bis $E3$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{20;0,035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}49$

$P(E2) = B_{50;0,035}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}47$

$P(E3) = B_{100;0,035}(X \geq 4) = 1 - B_{100;0,035}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}465$

1.2 Mindestens eine Zecke von 25 muss den FSME-Virus tragen, sonst wird man ja damit nicht angesteckt.

$B_{25;0,035}(X \geq 1) = 1 - B_{25;0,035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}59$

Die Aussage ist nicht wahr, da bei genau 25 Zeckenbissen 60% noch nicht erreicht sind.

1.3.1 Stichprobenumfang $n = 2000$; relative Häufigkeit $h = \frac{58}{2000} = 0{,}029$;
Sicherheitsniveau $c = 1{,}96$.
Vertrausensintervall: $\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$ (siehe Merkhilfe)

$$\left[0{,}029 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}; 0{,}029 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}\right] = [0{,}0216; 0{,}0364]$$

Interpretation:
Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke in Region A FSME-Viren in sich trägt im Intervall $[0{,}0216; 0{,}0364]$.

1.3.2 *Erläutern der Bedeutung des Ergebnisses 1.3.1 für den Umfang der Stichprobe in Region B:*
Die Länge L eines Vertrauensintervalls beträgt $2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$.
Ist in Region B (nach Aufgabenstellung) h größe, so wird auch der Ausdruck $h \cdot (1-h)$ unter der Wurzel größer. Damit wird der gesamte Ausdruck größer.
Begründung:
Die Funktion $g(h) = h \cdot (1-h) = h - h^2$ hat das Schaubild einer nach unten geöffneten Parabel mit der Scheitelachse $h = 0{,}5$.
Für $0 < h < 0{,}5$ ist die Funktion $g(h)$ streng monoton wachsend.
Da die Länge L gleich bleiben soll, muss der Nenner des Bruches unter der Wurzel wachsen, wenn der Zähler größer wird.
Fazit:
In der Region B wurden daher mehr als 2000 Zecken untersucht.

Lösung A2/2019

2.1 Sei W=Wolke, S=Sonne und M=Mond.
A: „Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad."
Dieses Ereignis tritt auf, wenn das Glücksrad beim dritten Drehen „W" zeigt oder dreimal „$\overline{W}$" erscheint.
$P(A) = P\left(\overline{WW}W\right) + P\left(\overline{WWW}\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$
B: „Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond."
Der folgende Ergebnisraum ist möglich:
$\Omega = \{MM\overline{M}; MSM; SMM\}$
Hinwies:
In den Ereignissen MSM und SMM kann nicht $\overline{M}$ verwendet werden, da darin die Wolke enthalten ist und das Spiel somit zu Ende wäre.
$P(B) = P\left(MM\overline{M}\right) + P(MSM) + P(SMM) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$

2.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Sonne erscheint unter der Bedingung, dass das Spiel mit Wolke endet.
C: „Das Spiel endet mit Wolke."
D: „Es erscheint keine Sonne."

$P(C) = P(W; \overline{W}W; \overline{WW}W) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{19}{27}$
$P(D) = P(W; MW; MMW)$
$P(C \cap D) = P(W; MW; MMW) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{12}$
$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{19}{27}} = \frac{63}{76} \approx 0{,}829$

2.3.1 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

x_i	$2\,€$	$1\,€$	$0\,€$	$-1\,€$
Ereignis	☼☼☼	☼☼	☼	alle anderen
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{51}{216}$	$\frac{153}{216}$

Erwartungswert: $E(X) = 2\,€ \cdot \frac{1}{216} + 1\,€ \cdot \frac{11}{216} - 1\,€ \cdot \frac{153}{216} = -\frac{35}{54}\,€ \approx -0{,}65\,€$
Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von $0{,}65\,€$ *pro Spiel rechnen.*

2.3.2 Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für $30 \leq X \leq 40$ der Auszahlung von $1\,€$: Binomialverteilung mit

$B_{140;\frac{17}{72}}(31 \leq X \leq 39) = B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 39) - B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 30) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}588$
Die Frau des Besitzers liegt mit ihrer Antwort mit etwa $59\,\%$ *richtig.*