Abituraufgaben Stochastik BG *(Teil 3 mit Hilfsmittel)* 2020-heute

Aufgabe A1/2020

1. Bei einem Festival können Teilnehmer zwischen zwei verschiedenen Veranstaltungen wählen. Erfahrungsgemäß besuchen $36\,\%$ aller Teilnehmer die Beachparty, während alle anderen zum Rockkonzert gehen. Die Tickets für das Festival kann man entweder online oder an der Abendkasse kaufen. Langjährige Erfahrungswerte zeigen, dass die Teilnehmer der Beachparty zu $70\,\%$ ihr Ticket online erwerben. Außerdem weiß man, dass insgesamt $26{,}8\,\%$ aller Teilnehmer ihr Ticket an der Abendkasse kaufen.

1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E_1: Von 5 zufällig ausgewählten Teilnehmern besuchen alle die Beachparty.
E_2: Von 30 zufällig ausgewählten Teilnehmern gehen mindestens 20 zur Beachparty.
E_3: Von 1000 Teilnehmern des Festivals besuchen mindestens 380, jedoch höchstens 390 Leute die Beachparty. (6P)

1.2 Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket online erwirbt.
Ein Teilnehmer hat sein Ticket online erworben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dann Teilnehmer der Beachparty ist. (5P)

1.3 Für die Beachparty im Sommer 2020 stehen 1500 Tickets zur Verfügung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ sollen alle der am Festival Interessierten, die zur Beachparty gehen möchten, tatsächlich ein Ticket für die Beachparty erhalten.
Ein Schüler behauptet, dass somit die Anzahl n aller am Festival Interessierten unter 3890 liegen muss.
Überprüfen Sie diese Behauptung und ermitteln Sie den maximalen Wert für n. (4 P)

Aufgabe A2/2020

2. Bei einer großen Feier werden ein Hauptgericht mit Fleisch, ein vegetarisches Hauptgericht, sowie anschließend eine Nachspeise angeboten. Die Planer greifen auf langjährige Erfahrungswerte ihrer Vorgänger zurück, bei denen alle Gäste genau ein Hauptgericht wählen, jedoch nur $85\,\%$ der Gäste eine Nachspeise nehmen. $30\,\%$ aller Gäste entscheiden sich für das vegetarische Hauptgericht. Von den Gästen, die sich für ein vegetarisches Hauptgericht entschieden haben, nehmen anschließend $75\,\%$ auch eine Nachspeise.

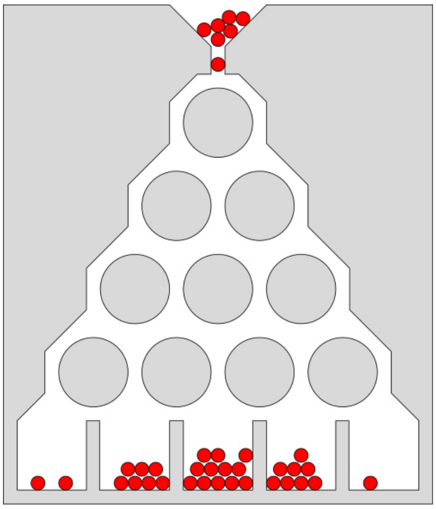
2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Gast ein Hauptgericht mit Fleisch wählt und eine Nachspeise nimmt.
Beziehen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Von denjenigen Gästen, die eine Nachspeise nehmen, ist der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als $27\,\%$." (6 P)

2.2 Eine Planung geht zunächst von 800 Gästen aus.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Genau 240 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
B: Höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
C: Mehr als 220, aber höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht. (6 P)

2.3 Bei einem Stichprobenumfang von 80 Gästen gaben 30 an, dass sie ein vegetarisches Hauptgericht wählen werden.
Beurteilen Sie auf der Basis eines $95\,\%$ - Vertrauensintervalls, ob die Planer dem oben genannten langjährigen Erfahrungswert vertrauen können. (3 P)

Aufgabe A1/2021

1. Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Nebenstehende Abbildung illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden.
Das dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagerecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}5$ nach jeweils einer der beiden Seiten ab.


Quelle: de.wikipedia.org

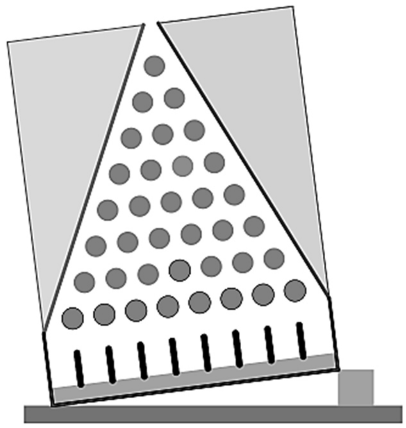
1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann.
Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an. (4P)

1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer. (4 P)

1.2 Erfahrungsgemäß fallen $5\,\%$ der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet.
Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden.“ (3P)

1.3 Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert $0{,}1$ hat.
Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt. (4P)


Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe A2/2021

2. Bei einer Wahl betrug die Wahlbeteiligung $76\,\%$.

2.1 Nach der Wahl werden zufällig Wahlberechtigte befragt, ob sie an der Wahl teilgenommen haben.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt. (5P)

2.2 Insgesamt wurden 136 Wahlberechtigte zufällig befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler ist. (3P)

2.3 Es haben $29\,\%$ der Wähler per Briefwahl abgestimmt.
Die Partei M erlangte $26\,\%$ aller Wählerstimmen.
Lediglich $8\,\%$ der Briefwähler wählten die Partei M.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wähler der Partei M nicht per Briefwahl abgestimmt hat. (4P)

2.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie:
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit $29\,\%$, bzw. $26\,\%$ gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau $30\,\%$ betragen." (3P)

Lösung A1/2020

1.1 Berechnungen von Binomialverteilungen:

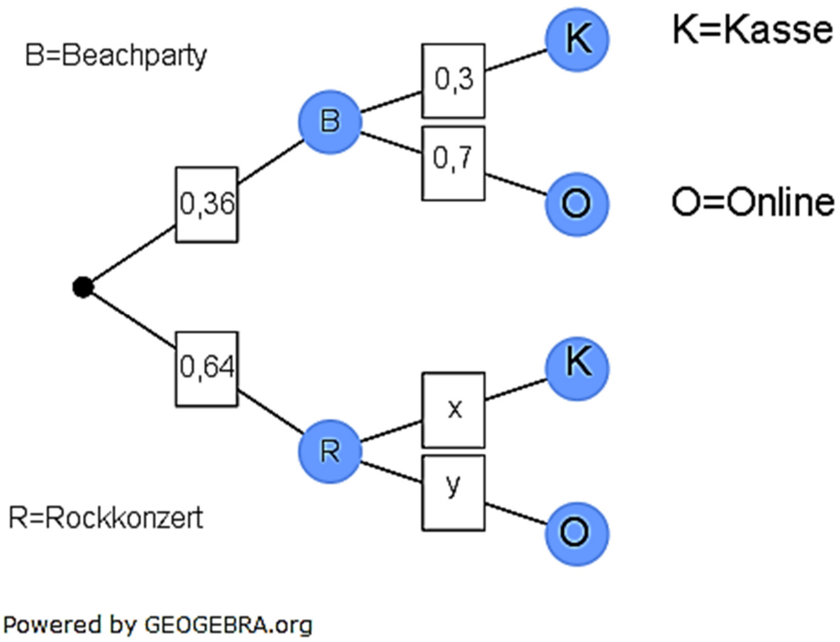
$P(E_1) = B_{5;0,36}(X = 5) = 0{,}0060$

$P(E_2) = B_{30;0,36}(X \geq 20) = 1 - B_{30;0,36}(X \leq 19) = 0{,}00062$

$P(E_3) = B_{1000;0,36}(380 \leq X \leq 390) = B_{1000;0,36}(X \leq 390) - B_{1000;0,36}(X \leq 379)$

$P(E_3) = 0{,}97729 - 0{,}9002 = 0{,}07709$

1.2 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



Nach Aufgabenstellung gilt: $26{,}8\,\%$ aller Teilnehmer kaufen ihr Ticket an der Abendkasse.

$P(Kasse) = 0{,}268 = P(B \cap K) + P(R \cap K)$

$P(B \cap K) = 0{,}36 \cdot 0{,}3 = 0{,}108; \quad P(R \cap K) = 0{,}64 \cdot x$

$0{,}108 + 0{,}64 \cdot x = 0{,}268$

$0{,}64 \cdot x = 0{,}16$

$x = \frac{0{,}16}{0{,}64} = 0{,}25$

$y = 1 - x = 0{,}75$

$P(R \cap O) = 0{,}64 \cdot 0{,}75 = 0{,}48$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket Online erwirbt, beträgt $48\,\%$*.*

Wahrscheinlichkeit, dass jemand Teilnehmer der Beachparty ist unter der Bedingung, dass er sein Ticket Online erworben hat:

Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit:

$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}7}{1 - 0{,}268} = \frac{0{,}252}{0{,}732} = 0{,}344 = 34{,}4\,\%$

$34{,}4\,\%$ *der Teilnehmer, die ihr Ticket Online erworben haben, gehen zur Beachparty.*

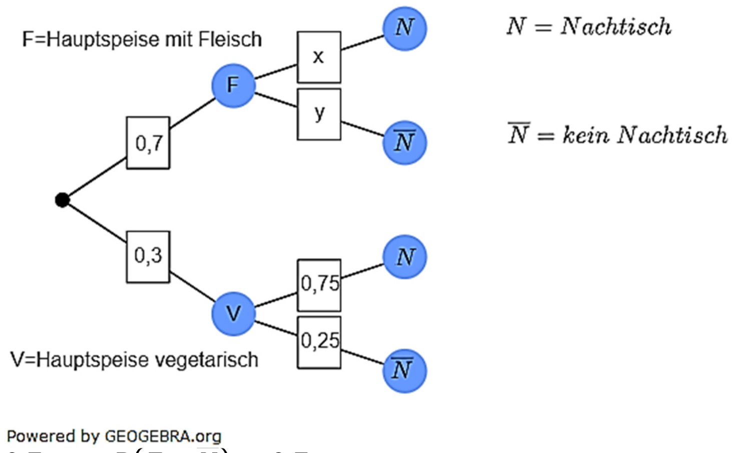
1.3 Binomialverteilung, bei der der Stichprobenumfang gesucht ist:
$B_{n;0,36}(X \leq 1500) \geq 0{,}99$

n	$B_{n;0,36}(X \leq 1500)$
3980	0,9871
3975	0,9890
3974	0,9893
3972	0,9900

Die maximale Anzahl der Teilnehmer beträgt 3972 und liegt somit unter 3980. Der Schüler hat Recht.

Lösung A2/2020

2.1 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x; \quad P\left(F \cap N\right) = 0{,}7 \cdot y$

$P(V \cap N) = 0{,}3 \cdot 0{,}75; \quad P\left(F \cap \overline{N}\right) = 0{,}3 \cdot 0{,}25$

Gemäß Aufgabenstellung nehmen $85\ \%$ Prozent der Gäste einen Nachtisch:

$P(F \cap N) + P(V \cap N) = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x = 0{,}85 - 0{,}225$

$x = \frac{25}{28}$

$y = 1 - x = \frac{3}{28}$

$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x = 0{,}7 \cdot \frac{25}{28} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

Ein zufällig ausgewählter Gast wählt mit $62{,}5\ \%$ ein Hauptgericht mit Fleisch und eine Nachspeise.

Anteil der Gäste mit Nachspeise, die auch vegetarisches Gericht wählen:
Hierbei handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass der Gast eine Nachspeise nimmt.

$P_N(V) = \frac{P(N \cap V)}{P(N)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}75}{0{,}85} = 0{,}265 = 26{,}5\ \%$

Die Aussage, dass der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als $27\ \%$ ist, ist falsch, denn $P_N(V) = 26{,}5\ \%$.

2.2 Berechnungen von Binomialverteilungen:

$P(A) = B_{800;0,3}(X = 240) = 0{,}0308$

$P(B) = B_{800;0,3}(X \leq 250) = 0{,}7916$

$P(C) = B_{800;0,3}(221 \leq X \leq 250) = B_{800;0,3}(X \leq 250) - B_{800;0,3}(X \leq 220)$

$P(C) = 0{,}7916 - 0{,}0653 = 0{,}7263$

2.3 Die relative Häufigkeit der Gäste mit vegetarischem Gericht ist $\frac{30}{80} = 0{,}375$.
Vertrauensintervall mit $95\,\%$-Sicherheitswahrscheinlichkeit:
$$\left[0{,}375 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}; 0{,}375 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}\right] = [0{,}2689; 0{,}4810]$$
Die angenommene Wahrscheinlichkeit von $P = 0{,}3$ liegt in dem Intervall. Somit können die Planer auf Basis dieses Intervalls dem Erfahrungswert zu $95\,\%$ vertrauen.

Lösung A1/2021

1.1.1 Prallt eine Kugel auf einem Stift auf, gibt es nur 2 Möglichkeiten: Die Kugel wandert nach links oder nach rechts.
Da es nur 2 Möglichkeiten gibt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment.
Die Wiederholungen des Experiments sind stochastisch unabhängig (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts wandert, bleibt gleich). Daher handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

X = Anzahl der Fälle, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach rechts wandert.
Mögliche Werte von X: $0; 1; 2; 3; 4$
Hinweis: Alternativ könnte X auch als die Anzahl der Fälle definiert werden, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach links wandert.

1.1.2 A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach, wenn die Kugel entweder viermal oder dreimal nach rechts läuft.
$P(A) = P(X = 4) + P(X = 3)$
X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$.
$P(X = 4) + P(X = 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.
Der Fall tritt ein, wenn die Kugel nicht viermal nach rechts oder viermal nach links läuft.
$P(B) = 1 - P(X = 4) - P(X = 0) = 1 - 0{,}0625 - 0{,}0625 = 0{,}875$

1.2 *Prüfung einer Stichprobe:*
Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$ für defekte Galtonbretter. Gesucht wird der Stichprobenumfang.
$B_{n;0{,}05}(X \geq 1) \geq 0{,}9$
$1 - B_{n;0{,}05}(X = 0) \geq 0{,}9$
$B_{n;0{,}05}(X = 0) < 0{,}1$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n < 0{,}1$
$0{,}95^n < 0{,}1 \quad | \quad ln$
$n \cdot ln(95) < ln\,(0{,}1) \quad | \quad ln(95)$
$n > \frac{\ln\,(0{,}1)}{\ln\,(0{,}95)} \quad \Rightarrow \quad n > 44{,}8$
Es müssen mindestens 45 Galton-Bretter überprüft werden. Die Aussage ist somit falsch.

1.3 *Wahrscheinlichkeit für ein schräg aufgestelltes Galtonbrett:*
Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Fälle an, an denen die Kugel nach links abprallt.
Z ist binomialverteilt mit $n = 8$ und unbekanntem p.
Die Kugel landet im mittleren Fach, wenn die Kugel viermal nach links und viermal nach rechts abprallt.
Bekannt: $B_{8;p}(Z = 4) = 0{,}1$

$\binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$p^4 \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{700}$ | $\sqrt[4]{}$

$p \cdot (1-p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}}$

$-p^2 + p - 0{,}1944 = 0$

$p^2 - p + 0{,}1944 = 0$

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}1944}$ | p/q-Formel

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}2358$

$p_1 = 0{,}736; \quad p_2 = 0{,}2642$

Da $p > 0{,}5$ sein muss (die Wahrscheinlichkeit ist aufgrund der Kipplage des Galton-Brettes größer als $0{,}5$) kommt nur $p = 0{,}736$ in Frage.

Lösung A2/2021

2.1 A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
$\Omega = \{g; g; \overline{g}; \overline{g}; \overline{g};\}$ g=gewählt; $\overline{g}$=nicht gewählt.
$P(A) = 0{,}76^2 \cdot (1-0{,}76)^3 = 0{,}008$

B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}76$
$B_{4;0{,}76}(X \leq 3) = 0{,}6664$

C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}76$
$B_{20;0{,}76}(12 \leq X \leq 17) = B_{20;0{,}76}(X \leq 17) - B_{20;0{,}76}(X \leq 11) = 0{,}8595$

2.2 Anzahl Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler bei Stichprobenumfang von 136.
$\frac{3}{4} \cdot 136 = 102$
Binomialverteilung mit $n = 136$ und $p = 0{,}76$
$B_{136;0{,}76}(X = 102) = 0{,}076$

2.3.1 *Wahrscheinlichkeit für zufällig ausgewählten Wähler der Partei M, kein Briefwahl:*
Bedingte Wahrscheinlichkeit.
M: Wähler hat Partei M gewählt
B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt
Es ist bekannt: $P(B) = 0{,}9$ und $P(M) = 0{,}26$
$8\,\%$ der Briefwähler wählen Partei M: $P(B \cap M) = 0{,}08 \cdot 0{,}26 = 0{,}0232$
Gesucht: $P_M(\overline{B}) = \frac{P(M \cap \overline{B})}{P_M}$

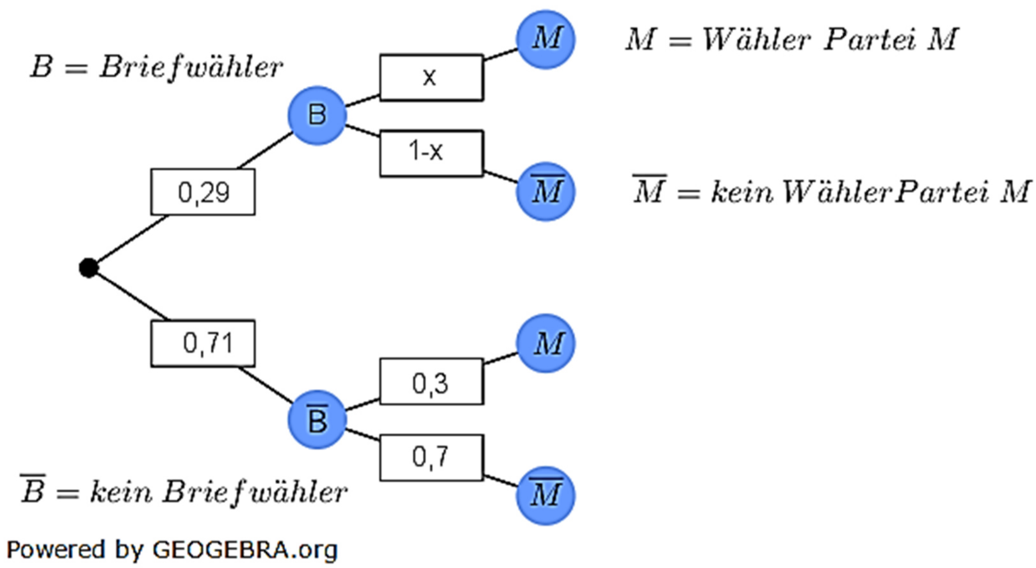
Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	$\sum$
B	0,0232	0,2668	0,29
$\overline{B}$	0,2368	0,4732	0,71
$\sum$	0,26	0,74	1,00

$P_{\overline{B}}(M) = \frac{0,2368}{0,26} = 0,9108$

2.3.2 Entscheidung ob
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit 29 %, bzw. 26 % gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau 30 % betragen.“
wahr oder falsch ist.

Ein Baumdiagramm für diese Prüfung hat folgendes Aussehen:



Gesucht ist der Wert von x, so dass $P(M) = 0,26$ ergibt.
$0,29 \cdot x + 0,71 \cdot 0,3 = 0,26$
$0,29 \cdot x = 0,047$
$x \approx 0,1621$
Wenn die Aussage stimmt, müsste gelten:
$P_B(M) = 0,1621$
Bei den Bedingungen in Aufgabe 2.3.1 gilt: $P_B(M) = \frac{0,0232}{0,29} = 0,08$
Da $0,1621 > 0,08$ ist, ist die Aussage wahr..