Abituraufgaben Stochastik BG *(Teil 3 mit Hilfsmittel)* 2020-heute

Lösung A1/2020

1.1 Berechnungen von Binomialverteilungen:

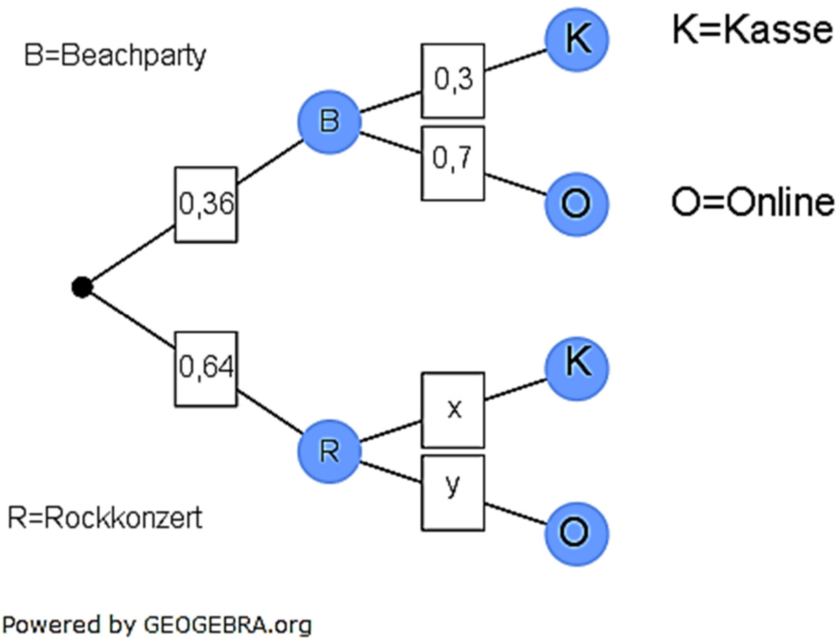
$P(E_1) = B_{5;0,36}(X = 5) = 0{,}0060$

$P(E_2) = B_{30;0,36}(X \geq 20) = 1 - B_{30;0,36}(X \leq 19) = 0{,}00062$

$P(E_3) = B_{1000;0,36}(380 \leq X \leq 390) = B_{1000;0,36}(X \leq 390) - B_{1000;0,36}(X \leq 379)$

$P(E_3) = 0{,}97729 - 0{,}9002 = 0{,}07709$

1.2 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



Nach Aufgabenstellung gilt: $26{,}8\,\%$ aller Teilnehmer kaufen ihr Ticket an der Abendkasse.

$P(Kasse) = 0{,}268 = P(B \cap K) + P(R \cap K)$

$P(B \cap K) = 0{,}36 \cdot 0{,}3 = 0{,}108; \quad P(R \cap K) = 0{,}64 \cdot x$

$0{,}108 + 0{,}64 \cdot x = 0{,}268$

$0{,}64 \cdot x = 0{,}16$

$x = \frac{0{,}16}{0{,}64} = 0{,}25$

$y = 1 - x = 0{,}75$

$P(R \cap O) = 0{,}64 \cdot 0{,}75 = 0{,}48$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket Online erwirbt, beträgt $48\,\%$*.*

Wahrscheinlichkeit, dass jemand Teilnehmer der Beachparty ist unter der Bedingung, dass er sein Ticket Online erworben hat:

Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit:

$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}7}{1 - 0{,}268} = \frac{0{,}252}{0{,}732} = 0{,}344 = 34{,}4\,\%$

$34{,}4\,\%$ *der Teilnehmer, die ihr Ticket Online erworben haben, gehen zur Beachparty.*

1.3 Binomialverteilung, bei der der Stichprobenumfang gesucht ist:

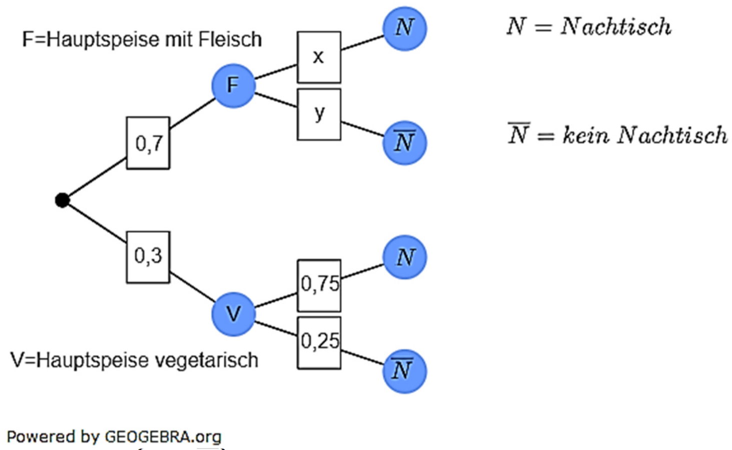
$B_{n;0,36}(X \leq 1500) \geq 0{,}99$

n	$B_{n;0,36}(X \leq 1500)$
3980	0,9871
3975	0,9890
3974	0,9893
3972	0,9900

Die maximale Anzahl der Teilnehmer beträgt 3972 und liegt somit unter 3980. Der Schüler hat Recht.

Lösung A2/2020

2.1 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x;\quad P\left(F \cap N\right) = 0{,}7 \cdot y$

$P(V \cap N) = 0{,}3 \cdot 0{,}75;\quad P\left(F \cap \overline{N}\right) = 0{,}3 \cdot 0{,}25$

Gemäß Aufgabenstellung nehmen $85\ \%$ Prozent der Gäste einen Nachtisch:

$P(F \cap N) + P(V \cap N) = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x = 0{,}85 - 0{,}225$

$x = \frac{25}{28}$

$y = 1 - x = \frac{3}{28}$

$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x = 0{,}7 \cdot \frac{25}{28} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

Ein zufällig ausgewählter Gast wählt mit $62{,}5\ \%$ ein Hauptgericht mit Fleisch und eine Nachspeise.

Anteil der Gäste mit Nachspeise, die auch vegetarisches Gericht wählen:
Hierbei handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass der Gast eine Nachspeise nimmt.

$P_N(V) = \frac{P(N \cap V)}{P(N)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}75}{0{,}85} = 0{,}265 = 26{,}5\ \%$

Die Aussage, dass der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als $27\ \%$ ist, ist falsch, denn $P_N(V) = 26{,}5\ \%$.

2.2 Berechnungen von Binomialverteilungen:

$P(A) = B_{800;0,3}(X = 240) = 0{,}0308$

$P(B) = B_{800;0,3}(X \leq 250) = 0{,}7916$

$P(C) = B_{800;0,3}(221 \leq X \leq 250) = B_{800;0,3}(X \leq 250) - B_{800;0,3}(X \leq 220)$

$P(C) = 0{,}7916 - 0{,}0653 = 0{,}7263$

2.3 Die relative Häufigkeit der Gäste mit vegetarischem Gericht ist $\frac{30}{80} = 0{,}375$.
Vertrauensintervall mit $95\ \%$-Sicherheitswahrscheinlichkeit:

$$\left[0{,}375 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}; 0{,}375 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}\right] = [0{,}2689; 0{,}4810]$$

Die angenommene Wahrscheinlichkeit von $P = 0{,}3$ liegt in dem Intervall. Somit können die Planer auf Basis dieses Intervalls dem Erfahrungswert zu $95\ \%$ vertrauen.

Lösung A1/2021

1.1.1 Prallt eine Kugel auf einem Stift auf, gibt es nur 2 Möglichkeiten: Die Kugel wandert nach links oder nach rechts.
Da es nur 2 Möglichkeiten gibt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment.
Die Wiederholungen des Experiments sind stochastisch unabhängig (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts wandert, bleibt gleich). Daher handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

X = Anzahl der Fälle, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach rechts wandert.
Mögliche Werte von X: $0; 1; 2; 3; 4$
Hinweis: Alternativ könnte X auch als die Anzahl der Fälle definiert werden, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach links wandert.

1.1.2 A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach, wenn die Kugel entweder viermal oder dreimal nach rechts läuft.
$P(A) = P(X = 4) + P(X = 3)$
X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$.
$P(X = 4) + P(X = 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.
Der Fall tritt ein, wenn die Kugel nicht viermal nach rechts oder viermal nach links läuft.
$P(B) = 1 - P(X = 4) - P(X = 0) = 1 - 0{,}0625 - 0{,}0625 = 0{,}875$

1.2 *Prüfung einer Stichprobe:*
Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$ für defekte Galtonbretter. Gesucht wird der Stichprobenumfang.
$B_{n;0{,}05}(X \geq 1) \geq 0{,}9$
$1 - B_{n;0{,}05}(X = 0) \geq 0{,}9$
$B_{n;0{,}05}(X = 0) < 0{,}1$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n < 0{,}1$
$0{,}95^n < 0{,}1 \quad | \quad ln$
$n \cdot ln(95) < ln\,(0{,}1) \quad | \quad ln(95)$
$n > \frac{\ln\,(0{,}1)}{\ln\,(0{,}95)} \quad \rightarrow \quad n > 44{,}8$
Es müssen mindestens 45 *Galton-Bretter überprüft werden. Die Aussage ist somit falsch.*

1.3 *Wahrscheinlichkeit für ein schräg aufgestelltes Galtonbrett:*
Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Fälle an, an denen die Kugel nach links abprallt.
Z ist binomialverteilt mit $n = 8$ und unbekanntem p.
Die Kugel landet im mittleren Fach, wenn die Kugel viermal nach links und viermal nach rechts abprallt.
Bekannt: $B_{8;p}(Z = 4) = 0{,}1$

$\binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$p^4 \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{700}$ | $\sqrt[4]{\ }$

$p \cdot (1-p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}}$

$-p^2 + p - 0{,}1944 = 0$

$p^2 - p + 0{,}1944 = 0$

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}1944}$ | p/q-Formel

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}2358$

$p_1 = 0{,}736;\quad p_2 = 0{,}2642$

Da $p > 0{,}5$ sein muss (die Wahrscheinlichkeit ist aufgrund der Kipplage des Galton-Brettes größer als $0{,}5$) kommt nur $p = 0{,}736$ in Frage.

Lösung A2/2021

2.1 A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
$\Omega = \{g; g; \overline{g}; \overline{g}; \overline{g};\}$ g=gewählt; $\overline{g}$=nicht gewählt.
$P(A) = 0{,}76^2 \cdot (1-0{,}76)^3 = 0{,}008$

B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}76$
$B_{4;0,76}(X \leq 3) = 0{,}6664$

C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}76$
$B_{20;0,76}(12 \leq X \leq 17) = B_{20;0,76}(X \leq 17) - B_{20;0,76}(X \leq 11) = 0{,}8595$

2.2 Anzahl Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler bei Stichprobenumfang von 136.
$\frac{3}{4} \cdot 136 = 102$
Binomialverteilung mit $n = 136$ und $p = 0{,}76$
$B_{136;0,76}(X = 102) = 0{,}076$

2.3.1 *Wahrscheinlichkeit für zufällig ausgewählten Wähler der Partei M, kein Briefwahl:*
Bedingte Wahrscheinlichkeit.
M: Wähler hat Partei M gewählt
B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt
Es ist bekannt: $P(B) = 0{,}9$ und $P(M) = 0{,}26$
$8\,\%$ der Briefwähler wählen Partei M: $P(B \cap M) = 0{,}08 \cdot 0{,}26 = 0{,}0232$
Gesucht: $P_M(\overline{B}) = \frac{P(M \cap \overline{B})}{P_M}$

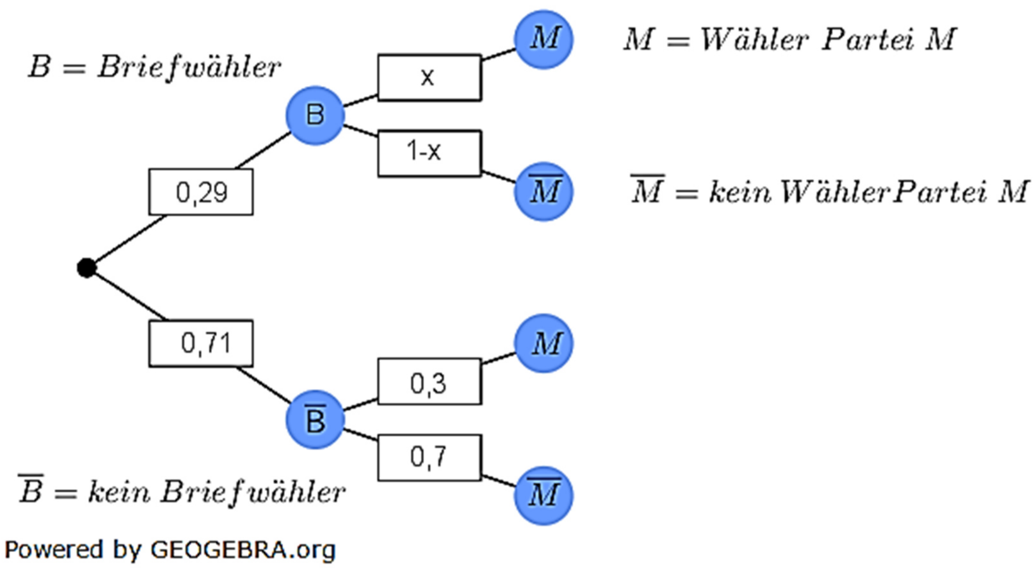
Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	$\sum$
B	0,0232	0,2668	0,29
$\overline{B}$	0,2368	0,4732	0,71
$\sum$	0,26	0,74	1,00

$P_{\overline{B}}(M) = \frac{0{,}2368}{0{,}26} = 0{,}9108$

2.3.2 Entscheidung ob
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit $29\,\%$, bzw. $26\,\%$ gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau $30\,\%$ betragen."
wahr oder falsch ist.

Ein Baumdiagramm für diese Prüfung hat folgendes Aussehen:



Gesucht ist der Wert von x, so dass $P(M) = 0{,}26$ ergibt.
$0{,}29 \cdot x + 0{,}71 \cdot 0{,}3 = 0{,}26$
$0{,}29 \cdot x = 0{,}047$
$x \approx 0{,}1621$
Wenn die Aussage stimmt, müsste gelten:
$P_B(M) = 0{,}1621$
Bei den Bedingungen in Aufgabe 2.3.1 gilt: $P_B(M) = \frac{0{,}0232}{0{,}29} = 0{,}08$
Da $0{,}1621 > 0{,}08$ ist, ist die Aussage wahr..