Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) *2022-2023*

Aufgabe A1/2022

1 Ein Institut untersucht im Auftrag eines Streamingdienstes das Medienverhalten von Bürgern einer Großstadt.

1.1 Eine statistische Erhebung unter 1000 zufällig ausgewählten Teilnehmern hat das Folgende ergeben:
450 Teilnehmer sind jugendlich und nutzen einen Streamingdienst. Die Ergebnisse der Erhebung sind in der nicht vollständig ausgefüllten Tabelle dargestellt. Dabei bezeichnen J und S die folgenden Ereignisse:

	S	$\overline{S}$	
J	450		
$\overline{J}$		150	
	800		1000

J: Teilnehmer ist jugendlich
S: Teilnehmer nutzt einen Streamingdienst

1.1.1 Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilnehmer der Erhebung jugendlich ist und einen Streamingdienst nutzt.
Beurteilen Sie, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind. (3P)

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes $P_J(S)$ im Sachzusammenhang. (2P)

1.2 Dem Institut ist bekannt, dass $70\,\%$ der Nutzer von Streamingdiensten den Anbieter A, $40\,\%$ den Anbieter B und $35\,\%$ beide Anbieter A und B verwenden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten keinen dieser beiden Anbieter verwendet. (3P)

1.3 An einer vom Institut organisierten Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil.

1.3.1 Es werden 5000 zufällig ausgewählte Personen angesprochen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.
Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt:
$P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0{,}9$. (4P)

1.3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens 1000 Personen für die Umfrage zu gewinnen. (3P)

Aufgabe A2/2022

2.1 In einer Urne befinden sich 100 Kugeln. 20 Kugeln sind rot, 30 gelb und 50 blau. Aus dieser wird immer ohne Zurücklegen gezogen.

2.1.1 Zunächst werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

2.1.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

C: Die dritte Kugel ist gelb. (5P)

2.1.1.2 Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses D gilt:

$P(D) = 3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$

Formulieren Sie ein zugehöriges Ereignis D im Sachzusammenhang. (2P)

2.1.2 Es werden nun sechs Kugeln gezogen. Jemand behauptet: *„Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau vier rote Kugeln gezogen werden, kann durch $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ berechnet werden."*

Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist, und geben Sie einen richtigen Lösungsansatz an. (3P)

2.2 In einer anderen Urne befinden sich ebenfalls nur rote, gelbe und blaue Kugeln. Von jeder Farbe sind jedoch jeweils gleich viele Kugeln in dieser Urne. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen ohne Zurücklegen nur Kugeln gleicher Farbe gezogen werden ist mindestens $10\,\%$.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die in dieser Urne mindestens enthalten sein müssen. (5P)

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) 2022-2023

Lösung A1/2022

1.1.1 *Wahrscheinlichkeit eines jugendlichen Teilnehmers, der einen Streamingdienst nutzt:*

Wir vervollständigen zunächst die Vierfeldertafel.

	S	$\overline{S}$	$\sum$
J	450	50	500
$\overline{J}$	350	150	500
$\sum$	800	200	1000

$P(J \cap S) = \frac{450}{1000} = 0{,}45 = 45\,\%$

Beurteilung, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind.

Zwei Ereignisse J und S sind stochastisch unabhängig wenn gilt:

$P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

$P(J) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}; \quad P(S) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$

$P(J) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\,\% \neq P(J \cap S)$

Die Ereignisse J und S sind stochastisch abhängig.

1.1.2 *Bedeutung des Wertes $P_J(S)$:*

Der Wert $P_J(S)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teilnehmer einen Streamingdienst benutzt unter der Bedingung, dass er jugendlich ist.

1.2 *Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten weder Anbieter A noch B verwendet.*

Wir tragen die vorgegebenen Werte in eine Vierfeldertafel ein.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,35	0,05	0,4
$\overline{B}$	0,35	0,25	0,6
$\sum$	0,7	0,30	1

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 = 25\,\%$

1.3.1 *Ermitteln von Werten:*
Binomialverteilung mit $n = 5000$; $p = 0{,}2$ für Teilnahme, X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.
Erwartungswert und Standardabweichung:
$\mu = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}2 = 1000$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}8} = 28{,}3$
Bestimmung eines Wertes von k, damit $P(\mu - k \le X \le \mu + k) \ge 0{,}9$.
Wir verwenden die einschlägig bekannten Sigma-Regeln.
Es gilt $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$.
$1{,}64\sigma = 1{,}64 \cdot 28{,}3 = 46{,}4$
$\mu - 1{,}64\sigma = 1000 - 46{,}4 = 953{,}6$ ➔ gewählt 954.
$\mu + 1{,}64\sigma = 1000 + 46{,}4 = 1046{,}4$ ➔ gewählt 1046.
$B_{5000;0,2}(954 \le X \le 1046) = 0{,}9493 - 0{,}0494 = 0{,}8999$
Weitere Kontrolle mit:
$B_{5000;0,2}(953 \le X \le 1047) = 0{,}9528 - 0{,}0459 = 0{,}9069$
Das kleinste k ist somit $1047 - 1000 = 47$.

1.3.2 *Mindestanzahl anzusprechender Personen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens 1000 Personen zur Teilnahme zu bewegen.*
Gesucht ist der Stichprobenumfang n.
$B_{n;0,2}(X \ge 1000) \ge 0{,}95$
$B_{n;0,2}(X \le 999) \le 0{,}05$

n	$B_{n;0,2}(X \le 999)$
5100	$0{,}2370$
5210	$0{,}07$
5220	$0{,}0612$
5230	$0{,}0533$
5235	$0{,}0497$
5234	$0{,}0505$

Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.

Lösung A2/2022

2.1.1.1 *Berechnen bestimmter Wahrscheinlichkeit:*

$P(rot) = \frac{20}{100}$; $P(gelb) = \frac{30}{100}$; $P(blau) = \frac{50}{100}$

Jeweils nur im ersten Zug (Ziehen OHNE Zurücklegen)

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

$P(A) = P(blau; blau; rot) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{20}{98} = \frac{5}{99}$

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

$P(B) = P(rot; rot; rot) + 3 \cdot P(rot; rot; \overline{rot})$

$P(B) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} + 3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{80}{98} = \frac{817}{8085}$

C: Die dritte Kugel ist gelb.

$P(C) = P(gelb; gelb; gelb) + P\left(\overline{gelb}; gelb; gelb\right) +$
$P\left(gelb; \overline{gelb}; gelb\right) + P\left(\overline{gelb}; \overline{gelb}; gelb\right)$

$P(C) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 + 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 40 + 70 \cdot 69 \cdot 30}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{3}{10}$

2.1.1.2 *Formulierung eines Ereignisses D im Sachzusammenhang:*

Der Term $3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$ berechnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen drei unterschiedliche Farben zu ziehen.

2.1.2 *Widerlegung einer Behauptung:*

Der Term $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ berechnet die beschriebene Wahrscheinlichkeit im Falle von „mit Zurücklegen“. Aufgabenstellung lautet jedoch „ohne Zurücklegen.

Berichtigung des Terms:

Richtig wäre $\binom{6}{4} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95}$

2.2 <u>*Ermittlung einer Anzahl Kugeln in einer Urne:*</u>

$P(rot) = \frac{n}{3n}$; $P(gelb) = \frac{n}{3n}$; $P(blau) = \frac{n}{3n}$

Jeweils nur im ersten Zug.

A: Beim dreimaligen Ziehen werden nur Kugeln gleicher Farbe gezogen.

$P(A) = P(rot; rot; rot) + P(gelb; gelb; gelb) + P(blau; blau; blau)$

$P(rot; rot; rot) = P(gelb; gelb; gelb) = P(blau; blau; blau)$

$P(A) = 3 \cdot P(rot; rot; rot) = 3 \cdot \frac{n}{3n} \cdot \frac{n-1}{3n-1} \cdot \frac{n-2}{3n-2}$

$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2}$

$\frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2} \geq 0{,}1 \quad | \quad \cdot (9n^2 - 9n + 2)$

$n^2 - 3n + 2 \geq 0{,}9n^2 - 0{,}9n + 0{,}2$

$0{,}1n^2 - 2{,}1n + 1{,}8 \geq 0 \quad | \quad : 0{,}1$

$n^2 - 21n + 18 \geq 0$

$n_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 18} = 10{,}5 \pm 9{,}6$

$n_1 = 20{,}1$; $n_2 = 0{,}9$

n_2 ist keine Lösung der Aufgabe.

Es liegen 63 Kugeln in der Urne, nämlich jeweils 21 rote, blaue und gelbe.