

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Aufgabe A1



1. Gegeben sind die Punkte $A(2|0|1)$, $B(-1|2|1)$, $C(1|5|4)$ und $D(3|0|5)$.

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

1.2 Die Punkte A , B , C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide. **4P**
 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem.
 Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.

1.3 Die Punkte A , B und C liegen in der Ebene E . **8P**
 Geben Sie die Koordinatenform von E an.
 Prüfen Sie, ob der Punkt $P'(-5,5|-8|14)$ der Spiegelpunkt von $P(6,5|10|-12)$ bezüglich der Ebene E ist.

Aufgabe A2

1. Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch
 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. **3P**

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. **6P**
 Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel.

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt $A(-5|0|1)$ und ist orthogonal zur Geraden g . Welche Lage hat F im Koordinatensystem? **6P**
 Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

Aufgabe A3

1.1 Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$. **5P**
 Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.
 Ergänze das Dreieck ABC zu durch einen Punkt D zu einer Raute.
 Berechne die Innenwinkel der Raute.
 Zeige, dass die Raute in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.

1.2 Gegeben sind die beiden Ebenen **5P**
 $E_1: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; s; t \in \mathbb{R}$.
 Zeige, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
 Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
 Bestimme eine Gleichung der Ebene E_3 .

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 1.3 Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$ und $Q(0|6|0)$. Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$. **5P**
- 1.3.1 Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
- 1.3.2 Berechne den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt.
Bestimme den Abstand von E zur x_1 -Achse.

Aufgabe A4

1. Die Punkte $A(1|2|4)$, $B(1|2|1)$ und $C(5|2|4)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
- 1.1 Zeichne das Dreieck ABC in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Welche besondere Lage hat das Dreieck ABC ? **3P**
- 1.2 Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. **4P**
- 1.3 Betrachte nun Pyramiden $ABCD$ mit der Grundfläche ABC . Das Volumen dieser Pyramiden soll 4 Volumeneinheiten betragen.
- 1.3.1 Bestimme einen geeigneten Punkt D . Beschreibe die Lage von allen möglichen Punkten D . **4P**
- 1.3.2 Untersuche, ob die Gerade $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$ jede dieser Pyramiden schneidet. **4P**

Aufgabe A5

1. Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|1|0)$, $B(2|3|0)$ und $P(3|0|2,5)$.
- 1.1 Bestimme eine Koordinatengleichung von E . Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. Unter welchem Winkel schneidet E die x_1 -Achse? (Teilergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$) **5P**
- 1.2 Zeige, dass das Dreieck ABP gleichschenkelig ist. Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck mit Diagonalschnittpunkt P . Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D . Es gibt senkrechte Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$ und der Höhe 12. Berechne die Koordinaten einer Spitze dieser Pyramiden. **7P**
- 1.3 Welche Punkte der x_1 -Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB ? **3P**

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Aufgabe A6

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|1|2)$, $B(3|0|6)$ und $C(11|8|10)$ gegeben.

1.1 Die Punkte A , B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. **3P**
 Zeige, dass dieses Dreieck einen rechten Winkel im Punkt B aufweist.

1.2 Ein Süßwarenhersteller beauftragt eine Werbefirma, eine neue Form für eine Verpackung zu kreieren. Die Werbefirma schlägt ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche vor. **6P**
 Berechne das Volumen der Verpackung für den Fall, dass A , B und C Eckpunkte der Grundfläche sind und die Deckfläche in der Ebene $H: -x_1 + x_2 = 17$ liegt.

1.3 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$. **6P**
 Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B .
 Bestimme den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe A7

1.1 Ermittle die Lagebeziehung der Ebene E und der Geraden g : **5P**
 $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

1.2 Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|8)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. **5P**
 Zeige, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechne die Größe des Winkels ACB .

1.3 Ermittle die Koordinaten eines Punktes D , der das Dreieck zu einer Raute ergänzt. **5P**
 In die Raute soll ein möglichst großer Kreis eingeschrieben werden. Ermittle den Radius des Kreises.

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben Lösung A1

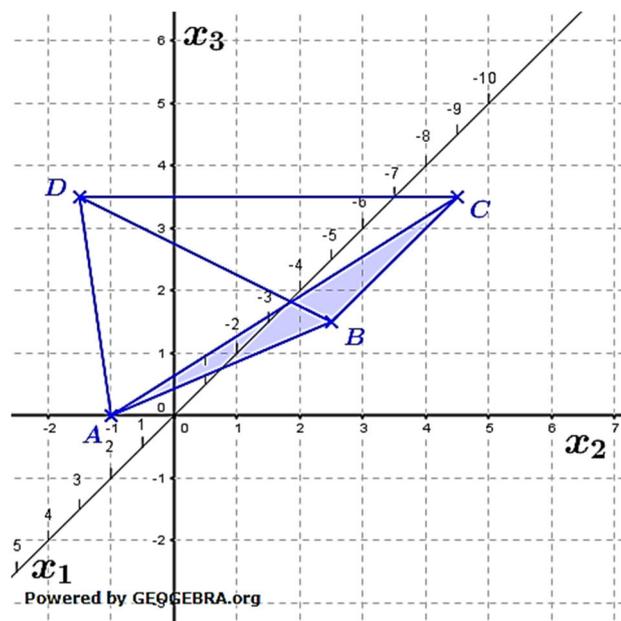
1.1 Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren den Wert Null hat. Hierzu benötigen wir zunächst alle Seitenvektoren.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 5-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0 = 0$$

Wegen $\vec{AB} \circ \vec{BC} = 0$ ist das Dreieck bei Punkt B rechtwinklig.

1.2 Zeichnung siehe Grafik links.
Besondere Lage von A und D :
Die x_2 -Koordinate der beiden Punkte ist 0, also liegen beide Punkte in der x_1x_3 -Ebene.



1.3 Koordinatenform der Ebene E :

$$k \cdot \vec{AB} \times \vec{AC} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = d$$

$$6 \cdot 2 + 9 \cdot 0 - 13 \cdot 1 = d$$

$$12 - 13 = -1$$

$$E: 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = -1$$

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Spiegelpunkt P' :

P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:

1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \vec{n}_E$

2. \overrightarrow{OQ} mit $\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}) \in E$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5,5 - 6,5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n}_E \quad | \quad \text{Die erste Bedingung ist erfüllt.}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6,5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5,5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot 0,5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{!}{=} -1 \quad | \quad \text{Punktprobe von } Q \text{ in } E$$

$$-1 = -1 \quad | \quad \text{Die zweite Bedingung ist erfüllt.}$$

P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E .

Lösung A2

1.1 Abstand von E zum Ursprung:

$$d = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 1 \approx 0,267$$

E hat etwa 0,3 LE Abstand zum Ursprung.

1.2 $g \cap E$

Aus g folgt:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -3 + t; \quad x_3 = 2 - t$$

eingesetzt in E :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 + t \\ 2 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 + t \\ 3 - t \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 + 6 - 2t + 3 - t = 0$$

$$12 - 3t = 0 \Rightarrow t = 4$$

Durchstoßpunkt P :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind $P(1|1|-2)$.

Schnittwinkel zwischen g und E :

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{rv}_g \circ \vec{ne}_E|}{|\vec{rv}_g| \cdot |\vec{ne}_E|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{28}}\right) \approx 34,5376$$

Der Schnittwinkel zwischen g und E ist etwa $34,54^\circ$ groß.

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.3 Ebene F:

Wegen g orthogonal zu F ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von F .

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$F: x_2 - x_3 - (-1) = 0$$

$$F: x_2 - x_3 = -1$$

Wegen der fehlenden x_1 -Koordinate verläuft die Ebene F parallel zur x_1 -Achse.

Lösung A3

1.1 Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, wenn es in zwei Seiten übereinstimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck gleichschenkelig.

Punkt D :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 + 4 \\ 4 + 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $D(4|4|-2)$.

Innenwinkel der Raute: Schnittwinkel zwischen Vektoren. Es genügt, z.B. den Winkel zwischen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{BC} zu berechnen, da der Winkel zwischen \overrightarrow{AD} und \overrightarrow{DC} genauso groß ist und die anderen beiden Winkel jeweils die Ergänzung 180° sind.

\sphericalangle_{ABC} :

$$\cos(\sphericalangle_{ABC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$$\sphericalangle_{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 101,53^\circ$$

$$\sphericalangle_{ADC} = \sphericalangle_{ABC} = 101,53^\circ$$

$$\sphericalangle_{BAD} = 180^\circ - \sphericalangle_{ABC} = 180^\circ - 101,53^\circ = 78,47^\circ$$

$$\sphericalangle_{BCD} = \sphericalangle_{BAD} = 78,47^\circ$$

Raute in Ebene E :

$$0 + 4 + 0 = 4 \quad \text{wahre Aussage} \quad | \quad \text{Punktprobe mit } A$$

$$0 + 0 + 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{wahre Aussage} \quad | \quad \text{Punktprobe mit } B$$

$$4 + 0 + 0 = 4 \quad \text{wahre Aussage} \quad | \quad \text{Punktprobe mit } C$$

$$4 + 4 + 2 \cdot (-2) = 4 \quad \text{wahre Aussage} \quad | \quad \text{Punktprobe mit } D$$

(Hinweis: Die Punktprobe mit Punkt D ist nicht notwendig, da Punkt D aus einer Linearkombination von \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{BC} errechnet wurde.)

Die Raute liegt in der Ebene E .

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.2 Bestimmung der Koordinatengleichung von E_2 :

$$k \cdot \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d$$

$$2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = d$$

$$d = 5$$

$$E_2: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

Wegen $\vec{n}_{E_1} = \vec{n}_{E_2} \wedge E_1 \neq E_2$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Da der Parameter d Maßzahl des Abstands einer Ebene zum Ursprung ist, berechnet sich d_3 aus $\frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$

$$E_3: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

1.3.1 Würfel und Ebene E :

Für die Ebene werden die Spurpunkte benötigt:

Da in der Ebenengleichung die x_1 -Koordinate nicht vorkommt, verläuft die Ebene parallel zur x_1 -Achse.

$$S_{x_2} \left(0 \mid \frac{8}{3} \mid 0 \right); S_{x_3} (0 \mid 0 \mid 8)$$

1.3.2 Berechnung des Winkels:

Schnittwinkel von Ebene/Ebene über \cos .

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_{E_1} \circ \vec{n}_{E_2}|}{|\vec{n}_{E_1}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

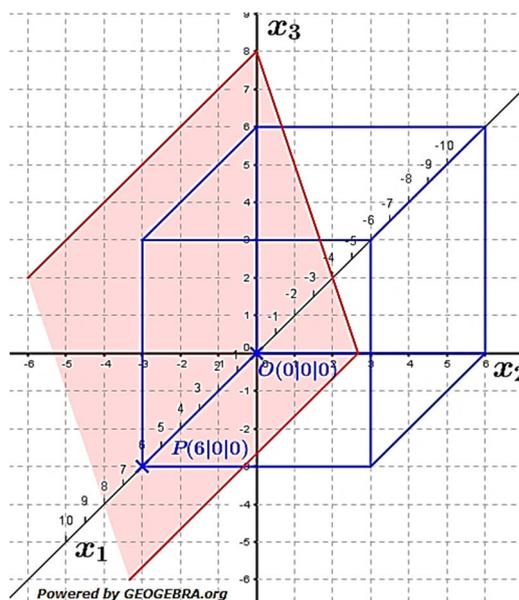
$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 71,6^\circ$$

Abstand von E zur x_1 -Achse:

$$E: \frac{3x_2 - x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0 \quad | \quad \text{HNF}$$

$$E: d(A, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = 2,53 \quad | \quad \text{Abstand z.B. über Punkt } A(0|0|0)$$

Die Ebene E hat von der x_1 -Achse den Abstand 2,53 LE.



Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A4

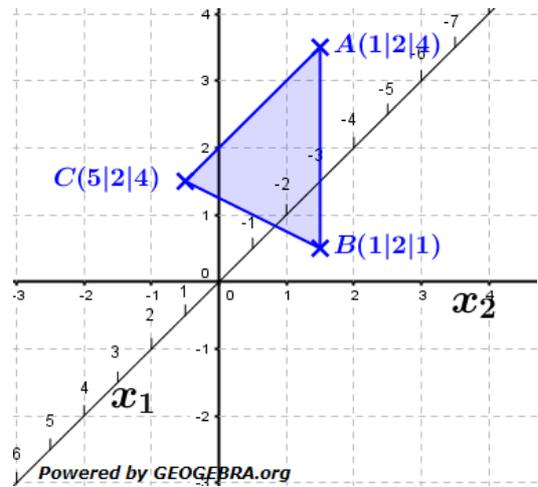
1.1 Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_3 -Ebene verläuft, da alle x_2 -Koordinaten denselben Wert aufweisen.

1.2 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wegen $|\vec{AB}| \neq |\vec{BC}| \neq |\vec{AC}|$ ist das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig.

$$\vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Wegen $|\vec{AB}| \circ |\vec{AC}| = 0$ ist das Dreieck ABC bei A rechtwinklig.



1.3.1 Ebenengleichung der Grundfläche:

$$k \cdot \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: x_2 = d$$

$$2 = d$$

$$E: x_2 = 2$$

Sei $D(1|x_2|4)$, dann gilt: $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 4$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 24$$

$$|-12x_2 + 24| = 24$$

$$x_{2_1} = 0; x_{2_2} = 4$$

Beispiel für mögliche D :

$$D_1 = (1|0|4); D_2 = (1|4|4)$$

Alle möglichen Punkte D liegen in einer der parallelen Ebenen, die von der Ebene durch A, B und C den Abstand 2 haben, also:

$$E_1: x_2 = 0; E_2: x_2 = 4$$

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

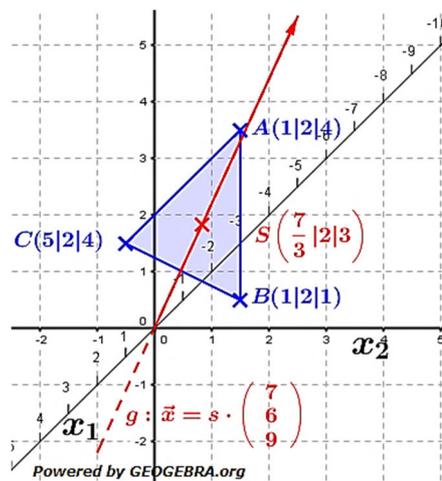
1.3.2 $E: x_2 = 2; \quad g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E \cap g$

$x_2 = 3s \Rightarrow s = \frac{2}{3}$

$S = \left(\frac{7}{3} \mid 2 \mid 3\right)$

Da A, B, C und S dieselbe x_2 -Koordinaten haben und außerdem $0 \leq s \leq 1$, ist S ein gemeinsamer Schnittpunkt von g mit allen Pyramiden, die ABC als Grundfläche besitzen.



Lösung A5

1.1 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}; \quad \vec{BP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$k \cdot \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

$6 + 2 + 0 = d \Rightarrow d = 8$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

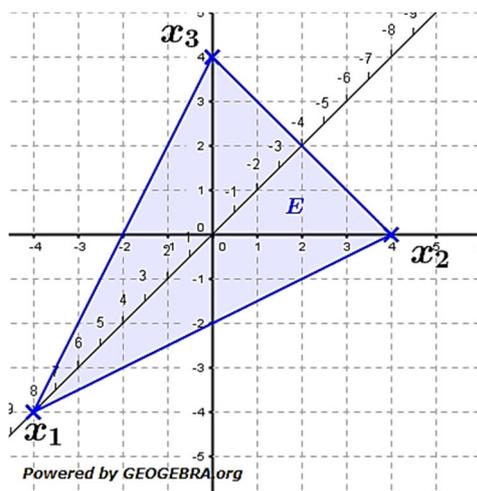
Spurpunkte:

$S_{x_1}(8 \mid 0 \mid 0); \quad S_{x_2}(0 \mid 4 \mid 0); \quad S_{x_3}(0 \mid 0 \mid 4)$

Schnittwinkel mit x_1 -Achse über \sin :

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{3}$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19,47^\circ$



1.2 Wegen $|\vec{AP}| = |\vec{BP}| \wedge |\vec{AP}| \neq |\vec{AB}|$ ist das Dreieck ABP gleichschenkelig.

$\vec{OC} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten sind $C(0 \mid -1 \mid 5)$ und $D(4 \mid -3 \mid 5)$.

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Die Spitzen der Pyramiden liegen auf der Geraden durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; |\vec{n}_E| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\vec{OS}_{1,2} = \vec{OP} \pm 4 \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \pm 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10,5 \end{pmatrix}; \vec{OS}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Die Spitze einer senkrechte Pyramide muss nicht unbedingt durch den gegebenen Punkt P gehen. Senkrechte Pyramiden sind alle Pyramiden, deren Spitze in den parallelen Ebenen zu E im Abstand von jeweils 12 LE liegen. Somit unendlich viele andere Lösungen denkbar.)

- 1.3 Der Punkt auf der x_1 -Achse sei $Q(q_1|0|0)$. Die q_1 -Koordinate von Q lässt sich aus $\vec{AQ} \circ \vec{BQ} = 0$ errechnen.

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{BQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 12 + 3 = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 15 = 0$$

$$q_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

$$q_{1_1} = 5; q_{1_2} = 3$$

Die Punkte $Q_1(5|0|0)$ und $Q_2(3|0|0)$ bilden mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q .

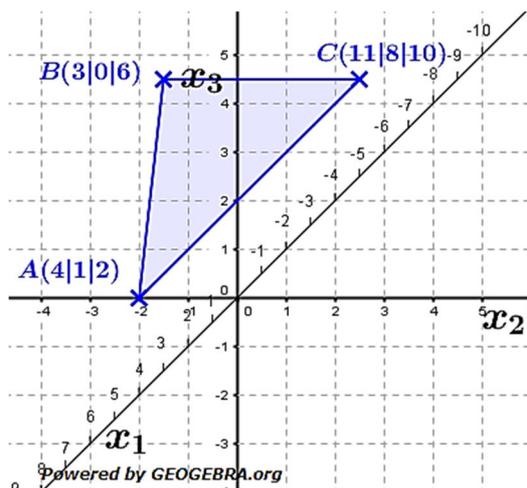
Lösung A6

1.1 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

Wegen $\vec{AB} \circ \vec{BC} = 0$, ist das Dreieck ABC bei rechtwinklig.



Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 1.2 Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC . Wegen Rechtwinkligkeit bei B ist dies $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{144} = 6 \cdot \sqrt{18}$.

Nun bestimmen wir noch den Abstand z. B. des Punktes A von der Ebene H über die HNF.

$$d(A; H) = \frac{|-x_1 + x_2 - 17|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4+1-17|}{\sqrt{2}} = 6 \cdot 20 \cdot \sqrt{9} = 360$$

Das Volumen der Verpackung beträgt 360 VE .

- 1.3 Gerade durch A und B :

$$h: x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsvektoren von g und h sind die beiden Geraden parallel.

Abstand zweier Geraden:

$d(g; h) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Vektor zwischen den beiden Aufpunkten und $\overrightarrow{rv_g}$ als Richtungsvektor einer Geraden.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 3-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(g; h) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt 3 LE .

Lösung A7

- 1.1 Koordinatengleichung von E :

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 8 = d \Rightarrow d = 8$$

$$E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

E und g sind parallel.

Punktprobe mit Aufpunkt von g in Ebene E :

$$2 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 0 \stackrel{!}{=} 8$$

$$8 = 8$$

Die Gerade g verläuft in E .

Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.2 $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Wegen $|\vec{AC}| = |\vec{BC}| \wedge |\vec{AB}| \neq |\vec{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

\sphericalangle_{ACB} :

$$\cos(\sphericalangle_{ACB}) = \frac{|\vec{AC} \circ \vec{BC}|}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right|} = \frac{64}{\sqrt{16+64} \cdot \sqrt{16+64}} = \frac{64}{80}$$

$$\sphericalangle_{ACB} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36,87^\circ$$

1.3 Punkt D für Raute:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Wegen der Raute, ist der Mittelpunkt des Kreises identisch mit dem Mittelpunkt der Raute. Dieser liegt in der Mitte der Strecke AB .

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Radius ist gleich dem Abstand des Punktes M zur z.B. Geraden durch A und D .

$$r = \frac{|\vec{AM} \times \vec{AD}|}{|\vec{AD}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{80}} = \sqrt{7,2}$$

$$r = 2,68$$

Der Radius des Innkreises ist 2,68 LE groß.

