Abitur Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Aufgabe A1

1. Gegeben sind die Punkte $A(2|0|1)$, $B(-1|2|1)$, $C(1|5|4)$ und $D(3|0|5)$.

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

1.2 Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide. **4P**
Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem.
Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koodinatensystem.

1.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. **8P**
Geben Sie die Koordinatenform von E an.
Prüfen Sie, ob der Punkt $P'(-5{,}5|-8|14)$ der Spiegelpunkt von $P(6{,}5|10|-12)$ bezüglich der Ebene E ist.

Aufgabe A2

1. Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. **3P**

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. **6P**
Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel.

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt $A(-5|0|1)$ und ist orthogonal zur Geraden g. Welche Lage hat F im Koordinatensystem? **6P**
Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

Aufgabe A3

1.1 Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$. **5P**
Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänze das Dreieck ABC zu durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechne die Innenwinkel der Raute.
Zeige, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.

1.2 Gegeben sind die beiden Ebenen **5P**

$$E_1:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \text{ und } E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ s;t \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimme eine Gleichung der Ebene E_3.

1.3 Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$ und $Q(0|6|0)$. Gegeben ist außerdem die Ebene E: $3x_2 + x_3 = 8$. **5P**

1.3.1 Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

1.3.2 Berechne den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimme den Abstand von E zur x_1-Achse.

Aufgabe A4

1. Die Punkte $A(1|2|4)$, $B(1|2|1)$ und $C(5|2|4)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks.

1.1 Zeichne das Dreieck ABC in ein dreidimensionales Koordinaten-system. Welche besondere Lage hat das Dreieck ABC? **3P**

1.2 Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist. **4P**
Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

1.3 Betrachte nun Pyramiden $ABCD$ mit der Grundfläche ABC. Das Volumen dieser Pyramiden soll 4 Volumeneinheiten betragen.

1.3.1 Bestimme einen geeignete Punkt D. **4P**
Beschreibe die Lage von allen möglichen Punkten D.

1.3.2 Untersuche, ob die Gerade g: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$ **4P**
jede dieser Pyramiden schneidet.

Aufgabe A5

1. Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|1|0)$, $B(2|3|0)$ und $P(3|0|2{,}5)$.

1.1 Bestimme eine Koordinatengleichung von E. **5P**
Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1-Achse?
(Teilergebnis: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$)

1.2 Zeige, dass das Dreieck ABP gleichschenklig ist. **7P**
Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck mit Diagonalschnittpunkt P.
Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D.
Es gibt senkrechte Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$ und der Höhe 12. Berechne die Koordinaten einer Spitze dieser Pyramiden.

1.3 Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse AB? **3P**

Abitur Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* *Musteraufgaben*

Aufgabe A6

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|1|2)$, $B(3|0|6)$ und $C(11|8|10)$ gegeben.

1.1 Die Punkte A, B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. **3P**
Zeige, dass dieses Dreieck einen rechten Winkel im Punkt B aufweist.

1.2 Ein Süßwarenhersteller beauftragt eine Werbefirma, eine neue Form **6P**
Für eine Verpackung zu kreieren. Die Werbefirma schlägt ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche vor.
Berechne das Volumen der Verpackung für den Fall, dass A, B und C Eckpunkte der Grundfläche sind und die Deckfläche in der Ebene $H: -x_1 + x_2 = 17$ liegt.

1.3 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$. **6P**
Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.
Bestimme den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe A7

1.1 Ermittle die Lagebeziehung der Ebene E und der Geraden g: **5P**
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R};\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t\ \mathbb{R}$.

1.2 Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|8)$ sind die Eck-punkte eines Dreiecks. **5P**
Zeige, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechne die Größe des Winkels ACB.

1.3 Ermittle die Koordinaten eines Punktes D, der das Dreieck zu einer Raute ergänzt. **5P**
In die Raute soll ein möglichst großer Kreis einbeschrieben werden.
Ermittle den Radius des Kreises.