Abitur Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* Musteraufgaben

Lösung A1

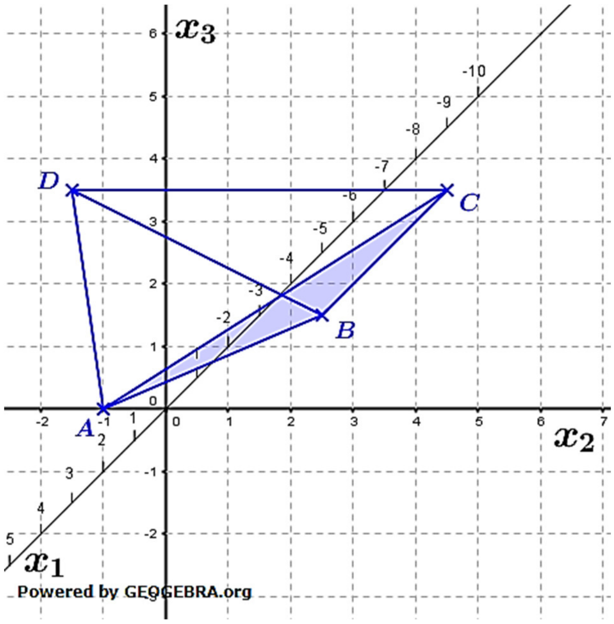
1.1 Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren den Wert Null hat. Hierzu benötigen wir zunächst alle Seitenvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 5-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -6+6+0 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ist das Dreieck bei Punkt B rechtwinklig.

1.2 Zeichnung siehe Grafik links.
Besondere Lage von A und D:
Die x_2-Koordinate der beiden Punkte ist 0, also liegen beide Punkte in der x_1x_3-Ebene.



1.3 Koordinatenform der Ebene E:

$$k \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = d$

$6 \cdot 2 + 9 \cdot 0 - 13 \cdot 1 = d$

$12 - 13 = -1$

$E\colon\ 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = -1$

Spiegelpunkt P':

P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:

1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \overrightarrow{n_e}$
2. $\overrightarrow{OQ}$ mit $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \in E$

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5{,}5 - 6{,}5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$ | Die erste Bedingung ist erfüllt.

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -1$ | Punktprobe von Q in E

$-1 = -1$ | Die zweite Bedingung ist erfüllt.

P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

Lösung A2

1.1 Abstand von E zum Ursprung:

$d = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 1 \approx 0{,}267$

E hat etwa $0{,}3\ LE$ Abstand zum Ursprung.

1.2 $g \cap E$

Aus g folgt:

$x_1 = 1;\ x_2 = -3 + t;\ x_3 = 2 - t$

eingesetzt in E:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 + t \\ 2 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 + t \\ 3 - t \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$3 + 6 - 2t + 3 - t = 0$

$12 - 3t = 0 \Longrightarrow\ t = 4$

Durchstoßpunkt P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind $P(1|1|-2)$.

Schnittwinkel zwischen g und E:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_g}| \cdot |\overrightarrow{ne}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{28}}\right) \approx 34{,}5376$

Der Schnittwinkel zwischen g und E ist etwa $34{,}54\,°$ groß.

1.3 Ebene F:

Wegen g orthogonal zu F ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von F.

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$F:\ \ x_2 - x_3 - (-1) = 0$

$F:\ \ x_2 - x_3 = -1$

Wegen der fehlenden x_1-Koordinate verläuft die Ebene F parallel zur x_1-Achse.

Lösung A3

1.1 Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, wenn es in zwei Seiten übereinstimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ *ist das Dreieck gleichschenklig.*

Punkt D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 4+0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $D(4|4|-2)$.

Innenwinkel der Raute: Schnittwinkel zwischen Vektoren. Es genügt, z.B. den Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, da der Winkel zwischen $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{DC}$ genauso groß ist und die anderen beiden Winkel jeweils die Ergänzung $180°$ sind.

$\sphericalangle_{ABC}$:

$$cos(\sphericalangle_{ABC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$\sphericalangle_{ABC} = arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 101{,}53\,°$

$\sphericalangle_{ADC} = \sphericalangle_{ABC} = 101{,}53\,°$

$\sphericalangle_{BAD} = 180\,° - \sphericalangle_{ABC} = 180° - 101{,}53\,° = 78{,}47\,°$

$\sphericalangle_{BCD} = \sphericalangle_{BAD} = 78{,}47\,°$

Raute in Ebene E:

$0 + 4 + 0 = 4$ wahre Aussage | Punktprobe mit A

$0 + 0 + 2 \cdot 2 = 4$ wahre Aussage | Punktprobe mit B

$4 + 0 + 0 = 4$ wahre Aussage | Punktprobe mit C

$4 + 4 + 2 \cdot (-2) = 4$ wahre Aussage | Punktprobe mit D

(Hinweis: Die Punktprobe mit Punkt ist nicht notwendig, da Punkt aus einer Linearkombination von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{BC}$ errechnet wurde.)

Die Raute liegt in der Ebene E.

1.2 Bestimmung der Koordinatengleichung von E_2:

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$E_2\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d$

$2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = d$

$d = 5$

$E_2\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

Wegen $\overrightarrow{n_{E_1}} = \overrightarrow{n_{E_2}} \wedge E_1 \neq E_2$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Da der Parameter d Maßzahl des Abstands einer Ebene zum Ursprung ist, berechnet sich d_3 aus $\frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{5-(-1)}{2} = 3$

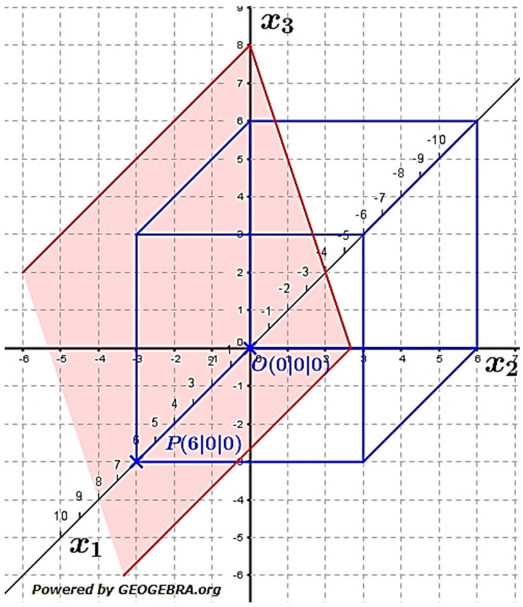
$E_3\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$

1.3.1 Würfel und Ebene E:

Für die Ebene werden die Spurpunkte benötigt:

Da in der Ebenengleichung die x_1-Koordinate nicht vorkommt, verläuft die Ebene parallel zur x_1-Achse.

$S_{x_2}\left(0\left|\frac{8}{3}\right|0\right);\quad S_{x_3}(0|0|8)$



1.3.2 Berechnung des Winkels:

Schnittwinkel von Ebene/Ebene über cos.

$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\alpha = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 71{,}6\,°$

Abstand von E zur x_1-Achse:

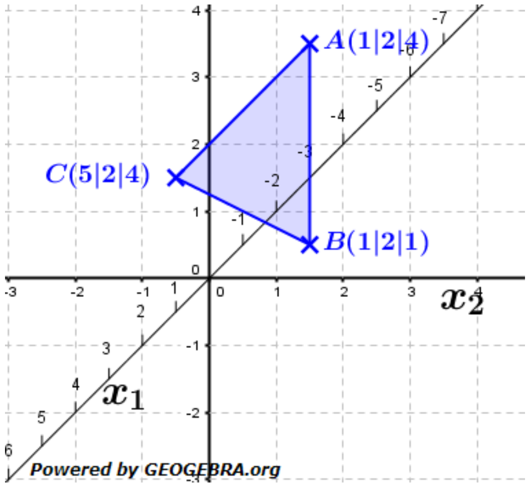
$E\colon \frac{3x_2 - x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0$ | HNF

$E\colon d(A, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = 2{,}53$ | Abstand z.B. über Punkt $A(0|0|0)$

Die Ebene E hat von der x_1-Achse den Abstand $2{,}53\ LE$.

Lösung A4

1.1 Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene, die parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft, da alle x_2-Koordinaten denselben Wert aufweisen.



1.2 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ *ist das Dreieck* ABC *nicht gleichschenklig.*

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| \circ |\overrightarrow{AC}| = 0$ *ist das Dreieck* ABC *bei* A *rechtwinklig.*

1.3.1 Ebenengleichung der Grundfläche:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 = d$
$2 = d$
$E\colon\ x_2 = 2$

Sei $D(1|x_2|4)$, dann gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 24$$

$|-12x_2 + 24| = 24$
$x_{2_1} = 0;\ x_{2_{2=4}}$
Beispiel für mögliche D:
$D_1 = (1|0|4);\ D_2 = (1|4|4)$
Alle möglichen Punkte D liegen in einer der parallelen Ebenen, die von der Ebene durch A, B und C den Abstand 2 haben, also:
$E_1\colon\ x_2 = 0;\ E_2\colon\ x_2 = 4$

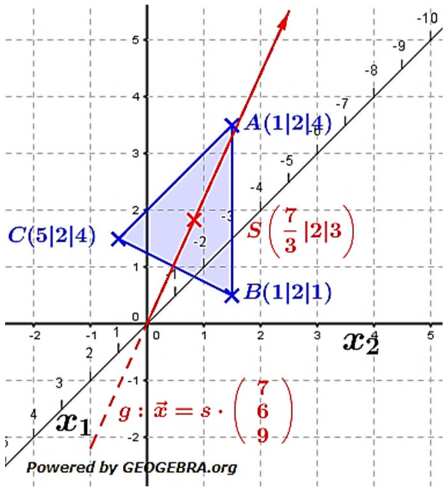
1.3.2 $E\colon\ x_2 = 2;\quad g\colon \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$

$E \cap g$

$x_2 = 3s \implies s = \frac{2}{3}$

$S = \left(\frac{7}{3}|2|3\right)$

Da A, B, C und S dieselbe x_2-Koordinaten haben und außerdem $0 \le s \le 1$, ist S ein gemeinsamer Schnittpunkt von g mit allen Pyramiden, die ABC als Grundfläche besitzen.



Lösung A5

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2{,}5\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2{,}5\end{pmatrix}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-1\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

$6 + 2 + 0 = d \implies d = 8$

$E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

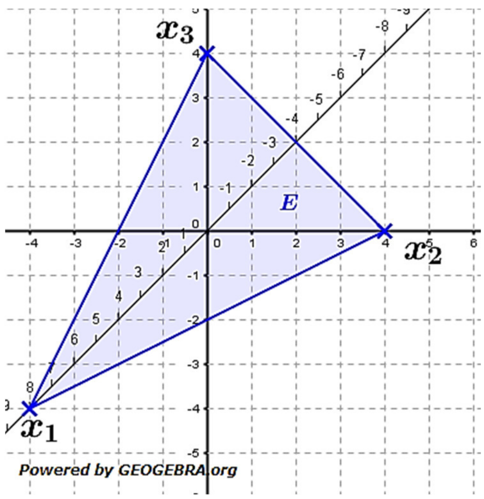
Spurpunkte:

$S_{x_1}(8|0|0);\ S_{x_2}(0|4|0);\ S_{x_3}(0|0|4)$

Schnittwinkel mit x_1-Achse über sin:

$$sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{3}$$

$\alpha = arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19{,}47\,°$



1.2 Wegen $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \wedge |\overrightarrow{AP}| \ne |\overrightarrow{AB}|$ ist das Dreieck ABP gleichschenklig.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$

Die Koordinaten sind $C(0|-1|5)$ und $C(4|-3|5)$.

Die Spitzen der Pyramiden liegen auf der Geraden durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\overrightarrow{OS_{1,2}} = \overrightarrow{OP} \pm 4 \cdot \overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \pm 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Die Spitze einer senkrechte Pyramide muss nicht unbedingt durch den gegebenen Punkt P gehen. Senkrechte Pyramiden sind alle Pyramiden, deren Spitze in den parallelen Ebenen zu E im Abstand von jeweils $12\,LE$ liegen. Somit unendlich viele andere Lösungen denkbar.)

1.3 Der Punkt auf der x_1-Achse sei $Q(q_1|0|0)$. Die q_1-Koordinate von Q lässt sich aus $\overrightarrow{AQ} \circ \overrightarrow{BQ} = 0$ errechnen.

$$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 - 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} q_1 - 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 12 + 3 = 0$$

$$q_1^2 - 8q_1 + 15 = 0$$

$$q_{1_{1,2}} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

$$q_{1_1} = 5; \quad q_{1_2} = 3$$

Die Punkte $Q_1(5|0|0)$ und $Q_2(3|0|0)$ bilden mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q.

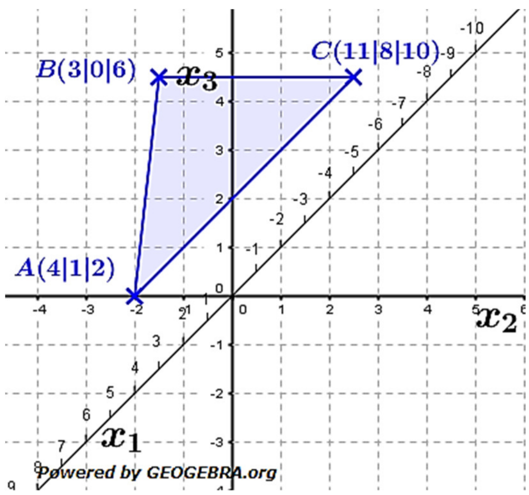
Lösung A6

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 - 8 + 16 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$, ist das Dreieck ABC bei rechtwinklig.



1.2 Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Wegen Rechtwinkligkeit bei B ist dies $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{144} = 6\cdot\sqrt{18}$.

Nun bestimmen wir noch den Abstand z. B. des Punktes A von der Ebene H über die HNF.

$d(A;H) = \frac{|-x_1+x_2-17|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4+1-17|}{\sqrt{2}} = 6\cdot 20\cdot\sqrt{9} = 360$

Das Volumen der Verpackung beträgt $360\,VE$.

1.3 Gerade durch A und B:

$$h:\ x = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Wegen der Gleichheit der Richtungsvektoren von g und h sind die beiden Geraden parallel.

Abstand zweier Geraden:

$d(g;h) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Vektor zwischen den beiden Aufpunkten und $\overrightarrow{rv_g}$ als Richtungsvektor einer Geraden.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}6-4\\3-1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}9\\-9\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt $3\,LE$.

Lösung A7

1.1 Koordinatengleichung von E:

$$k\cdot\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$E:\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

$2\cdot 3 + 2\cdot(-3) + 8 = d \Longrightarrow\ \ d = 8$

$E:\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$$\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} = 2+2-4 = 0$$

E und g sind parallel.

Punktprobe mit Aufpunkt von g in Ebene E:

$2\cdot(-1) + 2\cdot 5 + 0 \stackrel{?}{=} 8$

$8 = 8$

Die Gerade g *verläuft in* E.

Abitur Vektorgeometrie BG (*Teil 4 mit Hilfsmittel*) *Musteraufgaben*

1.2 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\0\\8\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}$

Wegen $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|\wedge|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

$\sphericalangle_{ACB}$:

$$\cos(\sphericalangle_{ACB})=\frac{|\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\8\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}\right|}=\frac{64}{\sqrt{16+64}\cdot\sqrt{16+64}}=\frac{64}{80}$$

$\sphericalangle_{ACB}=\arccos\left(\frac{4}{5}\right)=36{,}87\,°$

1.3 Punkt D für Raute:

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-8\end{pmatrix}$

Wegen der Raute, ist der Mittelpunkt des Kreises identisch mit dem Mittelpunkt der Raute. Dieser liegt in der Mitte der Strecke AB.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

Der Radius ist gleich dem Abstand des Punktes M zur z.B. Geraden durch A und D.

$$r=\frac{|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-16\\-16\\-8\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{80}}=\sqrt{7{,}2}$$

$r=2{,}68$

Der Radius des Innkreises ist $2{,}68\ LE$ *groß.*