Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

Aufgabe A1/2017

1.1 Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = 12$.

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse. (4P)
Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.
Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

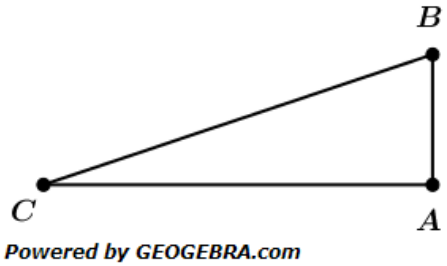
1.1.2 Bestimmen Sie a und b, sodass die Ebene E in Normalenform als (2P)

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}6\\0\\b\end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1|0|1)$ zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat. (3P)

1.2 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|2)$ und $B(0|0|4)$.
Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:
(1) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$
(2) $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch. (2P)

1.2.2 Bei Rotation der Fläche um die Achse $\overline{AB}$ entsteht ein Rotations-Körper. (4P)
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.
Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten $(c|c|2)$ mit $c > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von c.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

Aufgabe A1/2018

1 Ein Flugzeug fliegt auf seiner Route über zwei verschiedene Länder hinweg. Ein Abschnitt der Flugroute kann modellhaft dargestellt werden durch g mit

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ 0 \le t \le 20$$

wobei t die Zeit in Minuten ist.
Zu Beginn ($t = 0$) befindet sich das Flugzeug am Punkt $P(-20|-60|11)$.
Die x_3-Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.
Die Längeneinheit ist Kilometer (km). Die Luftraumgrenze der Länder wird durch die Ebene E mit $E\colon\ 3x_1 + 2x_2 = 0$ modelliert.

1.1 Bestimmen Sie den Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.
Begründen Sie, dass die Flughöhe in diesem Abschnitt ständig abnimmt. (4P)

1.2 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Zu Beginn beträgt der minimale Abstand des Flugzeugs zur Lauftraumgrenze der Länder weniger als 50 Kilometer." (4P)

1.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt.
Bestimmen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug dann befindet. (3P)

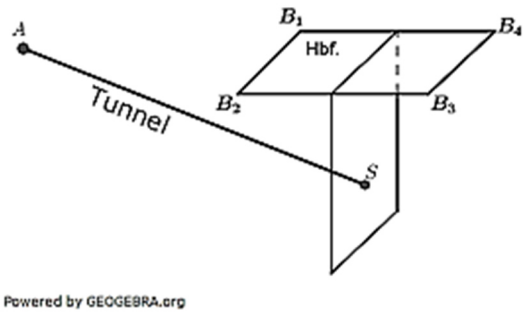
1.4 Ein anderes Flugzeug ist gleichzeitig auf einer anderen Route unterwegs. Diese Route wird durch h mit

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -56 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -0{,}25 \end{pmatrix};\ 0 \le t \le 20$$

modelliert. Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge zueinander innerhalb des zwanzigminütigen Flugabschnitts. (4P)

Aufgabe A1/2019

1 Die Grundfläche eines Hauptbahnhofs (Hbf.) wird durch ein Viereck mit den Eckpunkten $B_1(0|1|0)$, $B_2(3|0|0)$, $B_3(5|6|0)$ und $B_4(2|7|0)$ modelliert.
Ein Tunnel startet im Punkt $A(0|-11|0)$ und endet im Punkt $S(2{,}5|3{,}5|-0{,}5)$. Eine Längeneinheit entspricht 100 Meter (m). Die Modellierung ist in der nebenstehenden (nicht maßstabsgetreuen) Skizzen veranschaulicht.



Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Hbf. ein Rechteck ist. Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche in Quadratkilometer. (4P)

1.2 Der Tunnel von A nach S wird modelliert durch die Strecke g mit

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 14{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ \ 0 \le r \le 1.$$

1.2.1 Der Tunnel schließt mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf. liegt, einen Winkel ein. Berechnen Sie diesen Winkel. (2P)

1.2.2 Untersuchen Sie, ob für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite $\overline{B_1B_2}$ der Grundfläche des Hbf. eingehalten wird. (4P)

1.3 Eine Ebene E besitzt die Darstellung $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 13.$

1.3.1 Prüfen Sie, ob der Punkt S in der Ebene E liegt. (1P)

1.3.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden k durch A an, die orthogonal zu E ist.
Zur Planung eines weiteren Tunnels möchte man wissen, wo sich der Punkt A' $(\neq A)$ auf k befindet, der denselben Abstand zu E hat wie der Punkt A.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A'.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

Lösung A1/2017

1.1.1 *Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse bedeutet, dass $x_1; x_2 = 0$ ist.*
$-3x_3 = 12 \Longrightarrow \quad x_3 = -4$
$S_{x_3}(0|0|-4)$

Ebene F echt parallel E bedeutet, dass die Normalenvektoren ein Vielfaches voneinander sind, das absolute Glied d unterschiedlich ist.
$F\colon\ 2x_1 - 3x_3 = d$ mit $d \neq 12$.

Ebene G die nue eine Gerade mit E gemeinsame hat:
E verläuft parallel zur x_2-Achse. Somit ist die einfachste Ebene, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat, die x_2x_3-Ebene.
$G\colon\ x_1 = 0$

1.1.2 Die Umwandlung der Normalenform in die Koordinatenform führt zu:
$E\colon\ 6x_1 + bx_3 = a \cdot b$
Durch Koeffizientenvergleich von x_1 erkennen wir, dass der Normalenvektor der Normalenform das Dreifache des Normalenvektors der Koordinatenform ist. Wegen -3 bei x_3 der Koordinatenform muss damit $b = -9$ sein. Dadurch muss $a \cdot b = 3 \cdot 12 = 36$ sein.
$a \cdot (-9) = 36 \Longrightarrow \quad a = -4$.

1.1.3 Abstand von P zu E (über die HNF):
$\frac{|2x_1 - 3x_3 - 12|}{\sqrt{4+9}} \stackrel{?}{=} \sqrt{13}$
$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$
Der Punkt P hat den Abstand $d = \sqrt{13}$ zur Ebene E.

1.2.1 (1) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Das Ergebnis bedeutet, dass $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

(2) Der Betrag des Kreuzproduktes zweier Vektoren ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelgramms. Mit $\frac{1}{2} \cdot$ wird diese Fläche halbiert und stellt somit die Fläche eines Dreiecks dar.
$\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$ ist die Fläche des dargestellten (rechtwinkligen) Dreiecks ABC.

1.2.2 Volumen des Körpers:
Durch die Rotation entsteht ein Kegel mit der Volumenformel $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.
In der Aufgabe ist $h = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$ und $r = \left|\overrightarrow{CA}\right|$.
Wegen $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|2 \cdot \overrightarrow{AC}\right| = 6$ ist $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6$.
$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 2 = 24\pi \approx 75{,}4\ VE$
Der Kegel hat ein Volumen von etwa $75{,}4\ VE$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

Wert von c für Punkt $C(c|c|2)$ mit $c > 0$:
Jeder Punkt C muss die Bedingung erfüllen $|\overrightarrow{AC}| = 6$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} c-0 \\ c-0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$\sqrt{2c^2} = 6$
$c \cdot \sqrt{2} = 6$
$c = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2}$
Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $C(3 \cdot \sqrt{2}|3 \cdot \sqrt{2}|2)$.

Lösung A1/2018

1.1 *Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn:*

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug befindet sich fünf Minuten nach Beginn im Punkt $P(-10|-30|8{,}5)$.
Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \right| \cdot 3{,}6 = \sqrt{4 + 36 + 0{,}25} \cdot 60 = 380{,}66$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt ca. 380 km/h.

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3*-Koordinate des Richtungsvektors kleiner Null ist.*

1.2 *Abstand des Flugzeugs zur Lauftraumgrenze der Länder zu Beginn:*
Berechnung über den Aufpunkt der Fluggeraden und der HNF der Ebene der Luftraumgrenze:
HNF von E: $\frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{9+4}} = 0$
Abstand von P zu E: $d(P;E) = \frac{|3 \cdot (-20) + 2 \cdot (-60)|}{\sqrt{13}} = \frac{180}{\sqrt{13}} = 49{,}923$
Das Flugzeug ist damit zu Beginn weniger als $50\,km$ von der Luftraumgrenze der Länder entfernt.

1.3 *Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt:*
$g \cap E$:
Aus g folgt: $x_1 = -20 + 2t$
$x_2 = -60 + 6t$
$x_1;\ x_2 \rightarrow E$:
$3 \cdot (-20 + 2t) + 2 \cdot (-60 + 6t) = 0$
$6t - 60 + 12t - 120 = 0$
$18t = 180$
$t = 10$
Zehn Minuten nach Beobachtungsbeginn durchstößt das Flugzeug die Luftraumgrenze.
Höhe es Flugzeugs zu diesem Zeitpunkt:
$x_3 = 11 + 10 \cdot (-0{,}5) = 6$
Das Flugzeug befindet sich in $6\,km$ *Höhe.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

1.4 *Kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge:*

Entfernung zweier Punkte mit dem Satz des Pythagoras im Raum:

$F1(-20+2t|-60+6t|11-0{,}5t)$

$F2(20-2t|-56+6t|8{,}5-0{,}25t)$

$d(F1;F2) =$

$$\sqrt{\left(20-2t-(-20+2t)\right)^2+\left(-56+6t-(-60+6t)\right)^2+\left(8{,}5-0{,}25t-(11-0{,}5t)\right)^2}$$

$d(F1;F2)=\sqrt{(40-4t)^2+4^2+(-2{,}5+0{,}25t)^2}$

Der Abstand ist am kleinsten, wenn der Wert unter der Wurzel am kleinsten ist, die Funktion unter der Wurzel also einen Tiefpunkt hat.

$f(t)=(40-4t)^2+(-2{,}5+0{,}25t)^2+16$

$f'(t)=2(40-4t)\cdot(-4)+2(-2{,}5+0{,}25t)\cdot 0{,}25$

$f'(t)=-320+32t-1{,}25+0{,}125t=32{,}125t-321{,}25$

$32{,}125t-321{,}25=0$

$32{,}125t=321{,}25$

$t=10$

$d(t)=\sqrt{(40-40)^2+16+(-2{,}5+2{,}5)^2}=\sqrt{16}=4$

Nach 10 *Minuten ist der Abstand der beiden Flugzeuge mit* $4\,km$ *am kleinsten.*

Lösung A1/2019

1.1 *Nachweis eines Rechtecks und dessen Fläche.*

Das Viereck ist ein Rechteck, wenn

$|\overrightarrow{B_1B_2}|=|\overrightarrow{B_3B_4}|\wedge|\overrightarrow{B_2B_3}|=|\overrightarrow{B_1B_4}|\wedge|\overrightarrow{B_1B_2}|\circ|\overrightarrow{B_2B_3}|=0.$

$|\overrightarrow{B_1B_2}|=\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{B_3B_4}|=\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{B_2B_3}|=\left|\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$

$|\overrightarrow{B_1B_4}|=\left|\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$

$|\overrightarrow{B_1B_2}|\circ|\overrightarrow{B_2B_3}|=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}=6-6=0$

$A_{Rechteck}=|\overrightarrow{B_1B_2}|\cdot|\overrightarrow{B_2B_3}|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}=20$

Die Grundfläche ist $20\,FE=200000\,m^2=0{,}2km^2$ *groß.*

1.2 *Winkel zwischen Tunnel und Grundfläche:*

Winkelberechnung zwischen Geraden und Fläche mit dem sin.

Die Grundfläche des Hbf. hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$sin(\varphi)=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{rv_g}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2{,}5\\14{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2{,}5\\14{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-0{,}5|}{1\cdot\sqrt{2{,}5^2+14{,}5^2+0{,}5^2}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{216{,}75}}$$

$\varphi=arcsin\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{216{,}75}}\right)\approx 1{,}95\,°$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.2.2 *Untersuchung eines Sicherheitsabstandes:*
Der Sicherheitsabstand wird überall eingehalten, sofern der kleinste Abstand mindestens $20\,m$ beträgt. Ein kleinster Abstand steht stets senkrecht auf den zwei Objekten.
Gesucht ist der kleinste Abstand von zwei Geraden, nämlich der Geraden g und der Geraden durch die Punkte B_1 und B_2. Aus der gegebenen Graphik ist ersichtlich, dass diese beiden Geraden windschief sind.
Der kleinste Abstand windschiefer Geraden errechnet sich nach der Formel
$d(g;l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\overrightarrow{rv_g}\times\overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g}\times\overrightarrow{rv_l}|}$ mit $\overrightarrow{rv_g}$ und $\overrightarrow{rv_l}$ als den Richtungsvektoren der beiden Geraden und $\overrightarrow{P_1P_2}$ dem Vektor zwischen den beiden Aufpunkten der Geraden g und l.
Gerade l durch B_1 und B_2:

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} \implies \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}2{,}5\\14{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} \qquad | \qquad \text{(Aufgabenstellung)}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-11\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g}\times\overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix}2{,}5\\14{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}5\\-46\end{pmatrix}$$

$$d(g;l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\overrightarrow{rv_g}\times\overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g}\times\overrightarrow{rv_l}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}5\\-46\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2+46^2}} = \frac{18}{\sqrt{2118{,}5}} \approx 0{,}39$$

Die kürzeste Entfernung zwischen der Geraden g und der Strecke $\overline{B_1B_2}$ beträgt etwa $0{,}39\,LE = 39\,m$. Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

1.3.1 *Prüfung, ob S in E:*

$$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} \overset{?}{=} 13$$

$2{,}5 + 3\cdot 3{,}5 = 2{,}5 + 10{,}5 = 13$
$S \in E$.
Geraden k durch A orthogonal zu E:

$$k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-11\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$$

Koordinaten von A':
Gesucht ist der Spiegelpunkt von A an der Ebene E.
$k \cap E$:
Aus k folgt: $x_1 = r;\ \ x_2 = -11 + 3r;\ \ x_3 = 0$
$x_1; x_2; x_3 \to E$:
$E:\ x_1 + 3x_2 = 13$
$r + 3(-11 + 3r) = 13 \implies r - 33 + 9r = 13$
$r = 4{,}6$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* ab 2017

$r \to k$:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 4{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4{,}6 \\ -8{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 13{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 16{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $A'(9{,}2|16{,}2|0)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de