

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017
Lösung A1/2017

- 1.1.1 Schnittpunkt von E mit der x_3 -Achse bedeutet, dass $x_1; x_2 = 0$ ist.
 $-3x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = -4$
 $S_{x_3}(0|0|-4)$

Ebene F echt parallel E bedeutet, dass die Normalenvektoren ein Vielfaches voneinander sind, das absolute Glied d unterschiedlich ist.

$$F: 2x_1 - 3x_3 = d \quad \text{mit } d \neq 12.$$

Ebene G die nur eine Gerade mit E gemeinsame hat:

E verläuft parallel zur x_2 -Achse. Somit ist die einfachste Ebene, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat, die x_2x_3 -Ebene.

$$G: x_1 = 0$$

- 1.1.2 Die Umwandlung der Normalenform in die Koordinatenform führt zu:

$$E: 6x_1 + bx_3 = a \cdot b$$

Durch Koeffizientenvergleich von x_1 erkennen wir, dass der Normalenvektor der Normalenform das Dreifache des Normalenvektors der Koordinatenform ist. Wegen -3 bei x_3 der Koordinatenform muss damit $b = -9$ sein. Dadurch muss $a \cdot b = 3 \cdot 12 = 36$ sein.

$$a \cdot (-9) = 36 \Rightarrow a = -4.$$

- 1.1.3 Abstand von P zu E (über die HNF):

$$\frac{|2x_1 - 3x_3 - 12|}{\sqrt{4+9}} \stackrel{?}{=} \sqrt{13}$$

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Der Punkt P hat den Abstand $d = \sqrt{13}$ zur Ebene E .

- 1.2.1 (1) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$ ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$. Das Ergebnis bedeutet, dass $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.
 (2) Der Betrag des Kreuzproduktes zweier Vektoren ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelgramms. Mit $\frac{1}{2}$ wird diese Fläche halbiert und stellt somit die Fläche eines Dreiecks dar.
 $\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 6$ ist die Fläche des dargestellten (rechtwinkligen) Dreiecks ABC .

- 1.2.2 Volumen des Körpers:

Durch die Rotation entsteht ein Kegel mit der Volumenformel

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h.$$

In der Aufgabe ist $h = |\vec{AB}| = 2$ und $r = |\vec{CA}|$.

Wegen $\frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot \vec{AC}| = 6$ ist $|\vec{AC}| = 6$.

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \pi 6^2 \cdot 2 = 24\pi \approx 75,4 \text{ VE}$$

Der Kegel hat ein Volumen von etwa 75,4 VE.

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017

Wert von c für Punkt $C(c|c|2)$ mit $c > 0$:

Jeder Punkt C muss die Bedingung erfüllen $|\overrightarrow{AC}| = 6$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} c-0 \\ c-0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$\sqrt{2c^2} = 6$$

$$c \cdot \sqrt{2} = 6$$

$$c = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $C(3 \cdot \sqrt{2} | 3 \cdot \sqrt{2} | 2)$.

Lösung A1/2018

1.1 Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 8,5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug befindet sich fünf Minuten nach Beginn im Punkt $P(-10|-30|8,5)$.

Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot 3,6 = \sqrt{4 + 36 + 0,25} \cdot 60 = 380,66$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt ca. 380 km/h.

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3 -Koordinate des Richtungsvektors kleiner Null ist.

1.2 Abstand des Flugzeugs zur Luftraumgrenze der Länder zu Beginn:

Berechnung über den Aufpunkt der Fluggeraden und der HNF der Ebene der Luftraumgrenze:

$$\text{HNF von E: } \frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{9+4}} = 0$$

$$\text{Abstand von P zu E: } d(P; E) = \frac{|3 \cdot (-20) + 2 \cdot (-60)|}{\sqrt{13}} = \frac{180}{\sqrt{13}} = 49,923$$

Das Flugzeug ist damit zu Beginn weniger als 50 km von der Luftraumgrenze der Länder entfernt.

1.3 Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt:

$g \cap E$:

$$\text{Aus } g \text{ folgt: } x_1 = -20 + 2t$$

$$x_2 = -60 + 6t$$

$x_1; x_2 \rightarrow E$:

$$3 \cdot (-20 + 2t) + 2 \cdot (-60 + 6t) = 0$$

$$6t - 60 + 12t - 120 = 0$$

$$18t = 180$$

$$t = 10$$

Zehn Minuten nach Beobachtungsbeginn durchstößt das Flugzeug die Luftraumgrenze.

Höhe des Flugzeugs zu diesem Zeitpunkt:

$$x_3 = 11 + 10 \cdot (-0,5) = 6$$

Das Flugzeug befindet sich in 6 km Höhe.

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017

1.4 Kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge:

Entfernung zweier Punkte mit dem Satz des Pythagoras im Raum:

$$F1(-20 + 2t | -60 + 6t | 11 - 0,5t)$$

$$F2(20 - 2t | -56 + 6t | 8,5 - 0,25t)$$

$$d(F1; F2) =$$

$$\sqrt{(20 - 2t - (-20 + 2t))^2 + (-56 + 6t - (-60 + 6t))^2 + (8,5 - 0,25t - (11 - 0,5t))^2}$$

$$d(F1; F2) = \sqrt{(40 - 4t)^2 + 4^2 + (-2,5 + 0,25t)^2}$$

Der Abstand ist am kleinsten, wenn der Wert unter der Wurzel am kleinsten ist, die Funktion unter der Wurzel also einen Tiefpunkt hat.

$$f(t) = (40 - 4t)^2 + (-2,5 + 0,25t)^2 + 16$$

$$f'(t) = 2(40 - 4t) \cdot (-4) + 2(-2,5 + 0,25t) \cdot 0,25$$

$$f'(t) = -320 + 32t - 1,25 + 0,125t = 32,125t - 321,25$$

$$32,125t - 321,25 = 0$$

$$32,125t = 321,25$$

$$t = 10$$

$$d(t) = \sqrt{(40 - 40)^2 + 16 + (-2,5 + 2,5)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Nach 10 Minuten ist der Abstand der beiden Flugzeuge mit 4 km am kleinsten.

Lösung A1/2019

1.1 Nachweis eines Rechtecks und dessen Fläche.

Das Viereck ist ein Rechteck, wenn

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| = |\overrightarrow{B_3B_4}| \wedge |\overrightarrow{B_2B_3}| = |\overrightarrow{B_1B_4}| \wedge |\overrightarrow{B_1B_2}| \circ |\overrightarrow{B_2B_3}| = 0.$$

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B_3B_4}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B_2B_3}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{B_1B_4}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| \circ |\overrightarrow{B_2B_3}| = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$A_{\text{Rechteck}} = |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot |\overrightarrow{B_2B_3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = 20$$

Die Grundfläche ist 20 FE = 200000 m² = 0,2 km² groß.

1.2 Winkel zwischen Tunnel und Grundfläche:

Winkelberechnung zwischen Geraden und Fläche mit dem sin.

Die Grundfläche des Hbf. hat den Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{rv}_g|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{rv}_g|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-0,5|}{1 \cdot \sqrt{2,5^2 + 14,5^2 + 0,5^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{216,75}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{0,5}{\sqrt{216,75}}\right) \approx 1,95^\circ$$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017

1.2.2 Untersuchung eines Sicherheitsabstandes:

Der Sicherheitsabstand wird überall eingehalten, sofern der kleinste Abstand mindestens 20 m beträgt. Ein kleinster Abstand steht stets senkrecht auf den zwei Objekten.

Gesucht ist der kleinste Abstand von zwei Geraden, nämlich der Geraden g und der Geraden durch die Punkte B_1 und B_2 . Aus der gegebenen Graphik ist ersichtlich, dass diese beiden Geraden windschief sind. Der kleinste Abstand windschiefer Geraden errechnet sich nach der Formel

$$d(g; l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l}|} \text{ mit } \overrightarrow{rv_g} \text{ und } \overrightarrow{rv_l} \text{ als den Richtungsvektoren der beiden}$$

Geraden und $\overrightarrow{P_1P_2}$ dem Vektor zwischen den beiden Aufpunkten der Geraden g und l .

Gerade l durch B_1 und B_2 :

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad | \quad (\text{Aufgabenstellung})$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,5 \\ -46 \end{pmatrix}$$

$$d(g; l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,5 \\ -46 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0,5^2 + 1,5^2 + 46^2}} = \frac{18}{\sqrt{2118,5}} \approx 0,39$$

Die kürzeste Entfernung zwischen der Geraden g und der Strecke $\overline{B_1B_2}$ beträgt etwa 0,39 LE = 39 m. Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

1.3.1 Prüfung, ob S in E :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 13$$

$$2,5 + 3 \cdot 3,5 = 2,5 + 10,5 = 13$$

$S \in E$.

Geraden k durch A orthogonal zu E :

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

Koordinaten von A' :

Gesucht ist der Spiegelpunkt von A an der Ebene E .

$k \cap E$:

$$\text{Aus } k \text{ folgt: } x_1 = r; \quad x_2 = -11 + 3r; \quad x_3 = 0$$

$$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E:$$

$$E: x_1 + 3x_2 = 13$$

$$r + 3(-11 + 3r) = 13 \implies r - 33 + 9r = 13$$

$$r = 4,6$$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4 mit Hilfsmittel) **ab 2017**

$r \rightarrow k$:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 4,6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,6 \\ 2,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4,6 \\ -8,2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4,6 \\ 13,8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ 16,2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $A'(9,2|16,2|0)$.