Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) ab 2020-2021

Aufgabe A1/2020

1. Ein Architekt plant ein modernes Museum. Im Modell hat das Museum eine rechteckige Grundfläche mit den Eckpunkten $A_1(0|0|0)$, $B_1(10|0|0)$, $C_1(10|5|0)$, $D_1(0|5|0)$ und ein Dach, das aus den vier Eckpunkten $A_2(0|0|2)$, $B_2(10|0|2)$, $C_2(10|6|2)$ und $D_2(0|5{,}5|2{,}5)$ gebildet wird.
Die von der Grundfläche zum Dach verlaufenden Kanten des Modells verbinden Punkte gleichen Buchstabens, z.B. ist A_1 mit A_2 verbunden.
Eine Längeneinheit im Modell entspricht 10 Meter (m).

1.1 Zeichnen Sie das Modell in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 P)

1.2 Die Vorderseite des Modells (d.h. der Schnitt mit der Ebene $x_1 = 10$) bildet ein Trapez. Diese Fläche soll zu $80\,\%$ aus einem Spezialglas bestehen, das 400 Euro pro m^2 kostet.
Berechnen Sie die hierfür zu kalkulierenden Kosten. (3 P)

1.3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ teilt das Dach in zwei dreieckige Flächen.
Bestimmen Sie den Winkel den diese beiden Flächen im Innern des Modells bilden. (4 P)

1.4 Im Punkt C_2 soll ein Laser installiert werden, der den Laserstrahl in Richtung $\overline{C_1C_2}$ geradlinig in den Himmel schickt.
Entsprechend soll im Punkt D_2 ein weiterer Laser mit Laserstrahl in Richtung $\overline{D_1D_2}$ installiert werden.

1.4.1 Geben Sie für jeden der beiden Laserstrahlen eine Gleichung der entsprechenden Geraden an. (2 P)

1.4.2 Bestimmen Sie die Höhe über der Grundfläche, in der diese beiden Laserstrahlen genau $212{,}5\,m$ voneinander entfernt sind. (2 P)

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1/2021

1. In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2-Ebene mit $x_2 \geq 0$.
Die quadratische Grundfläche $ABCD$ der Pyramide hat die Eckpunkte $A(0|4|0)$, $B(4|4|0)$, $C(4|8|0)$ und D. Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).

1.1 Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$ liegt. (2P)

1.2 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein. (3P)

1.3 Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 1500 Euro pro Quadratmeter kostet.
Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung. (2P)

1.4 Der Raum wird nach einer Seite hin durch eine fensterlose Wand begrenzt, die Teil der x_1x_3-Ebene mit $x_3 \geq 0$ ist. Die gegenüberliegende Wand besteht aus Glas. Vormittags trifft Sonnenlicht durch die Glaswand ein. Das Sonnenlicht verläuft in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$ und verursacht einen Schatten der gesamten Pyramide.
Untersuchen Sie, ob dieser Schatten auf die fensterlose Wand trifft. (4P)

1.5 Im Punkt $K(0|9|3)$ ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert.
Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt $P(5|4|2)$ aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann.

Aufgabe A2/2021

2. Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Dieser wird modelliert durch g mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix};\ \ 0 \le t \le 15$$

Hierbei ist t die Zeit in Minuten ($t = 0$ ist der Beginn des Landeanflugs) und die Längeneinheit ist Kilometer (km).
Die x_3-Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

2.1 Die Spitze des Flughafenturms befindet sich in $S(11|14|0{,}13)$.
Berechnen Sie, wie weit das Flugzeug eine Minute nach Beginn des Landeanflugs von der Spitze des Flughafenturms entfernt ist. (3P)

2.2 In einem Flugraum ist ständig mit anderen Flugzeugen zu rechnen. Dieser Flugraum wird zylinderförmig modelliert, wobei der Radius $0{,}8\,km$ ist und die Rotationsachse durch die Gerade h mit

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

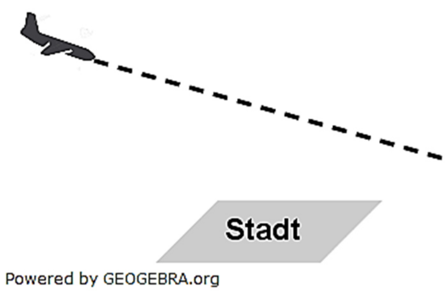
beschrieben wird. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in diesen Flugraum eintritt. (3P)

2.3 Die horizontale Landebahn befindet sich auf 100 Meter Höhe über dem Meeresspiegel. Ermitteln Sie den Landepunkt und den Winkel, unter dem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. (3P)

2.4 Vor der Landung wurde eine Stadt überflogen. Diese Stadt wird modelliert durch das Rechteck $ABCD$. Es sind $A(0|0|0{,}2)$ und $C(11|4|0{,}2)$. Das Rechteck liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0{,}2$ und seine Seiten sind parallel zur x_1-Achse bzw. x_2-Achse.

2.4.1 Geben sie die Koordinaten der Punkte B und D an. (2P)

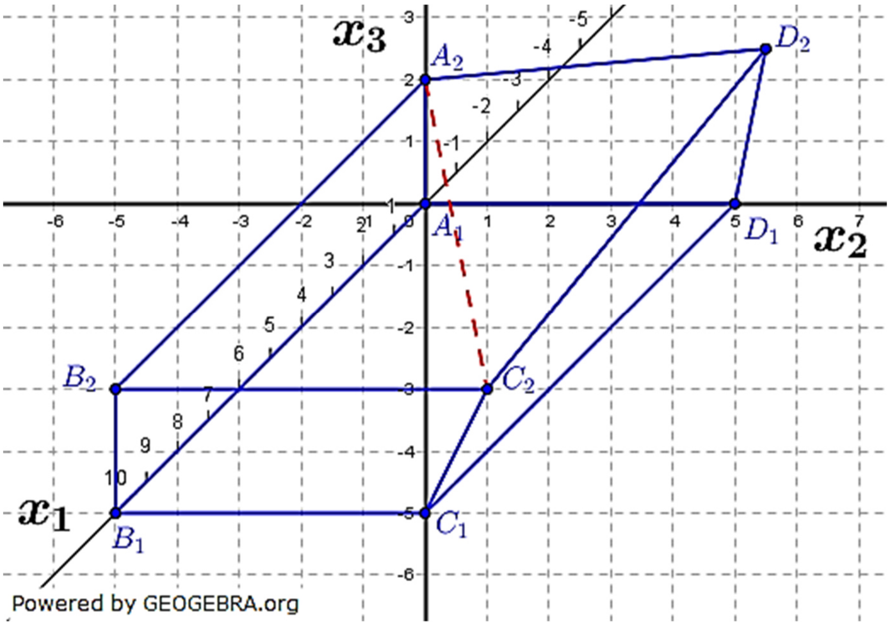
2.4.2 Aus Sicherheitsgründen muss das Flugzeug stets mindestens $300\,m$ über der Stadt fliegen (siehe Abbildung). Prüfen Sie, ob das Flugzeug diese Mindesthöhe über der Stadt einhält. (4P)



Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2020-2021

Lösung A1/2020

1.1 *Objekt im Koordinatensystem:*



1.2 *Kosten der Trapezfläche:*

$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{50+60}{2} \cdot 20 = 1100\ m^2.$

$K_{Trapez} = A_{Trapez} \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 1100 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 352000{,}00$ €.

1. 3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ führt zu zwei Flächen. Fläche 1 geht durch die Punkte A_2, B_2 und C_2, Fläche 2 durch die Punkte A_2, C_2 und D_2. Gesucht ist der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Ebene 1:

$E_1\colon\ x_3 = 2 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene 2:

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = (\overrightarrow{C_2A_2}) \times (\overrightarrow{C_2D_2}) = \begin{pmatrix} 0-10 \\ 0-6 \\ 2-2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-10 \\ 5{,}5-6 \\ 2{,}5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -55 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+25+3025}} = \frac{55}{\sqrt{3059}}$

$\varphi = arccos\left(\frac{55}{\sqrt{3059}}\right) = 6{,}05\,°$

Im Innern des Gebäudes liegt jedoch ein stumpfer Winkel zwischen den beiden Flächen vor, somit $\varphi + 180\,°$.

Die beiden Flächen schließen im Inneren einen Winkel von etwa $106\,°$ ein.

1.4.1 *Gleichung der Gerade durch die Punkte C_1 und C_2 :*

$$g:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OC_1} + r \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10-10 \\ 6-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Gerade durch die Punkte D_1 und D_2 :

$$h:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OD_1} + s \cdot \overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5{,}5-5 \\ 2{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Allgemeiner Punkt auf g: $P(10|5+r|2r)$
Allgemeiner Punkt auf h: $Q(0|5+0{,}5s|2{,}5s)$
Nach Aufgabenstellung sollen die Laserstrahlen auf gleicher Höhe sein, also:

$2r = 2{,}5s$ ➔ $s = \frac{4}{5}r$

$P(10|5+r|2r)$

$Q(0|5+0{,}4r|2r)$

Abstand zweier Punkte über den Satz des Pythagoras:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(10-0)^2 + (5+r-5-0{,}4r)^2} = \sqrt{100+0{,}36r^2}$

Der Abstand soll $212{,}5\,m$ betragen, also $|\overrightarrow{PQ}| = 21{,}25$

$\sqrt{100+0{,}36r^2} = 21{,}25 \quad | \quad ^2$

$100 + 0{,}36r^2 = 451{,}5625$

$0{,}36r^2 = 351{,}5625$

$r^2 = 976{,}5625 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$r = 31{,}25$

Wegen $x_3 = 2r$ haben die beiden Laserstrahlen in einer Höhe von $625\,m$ einen Abstand von $212{,}5\,m$.

Lösung A1/2021

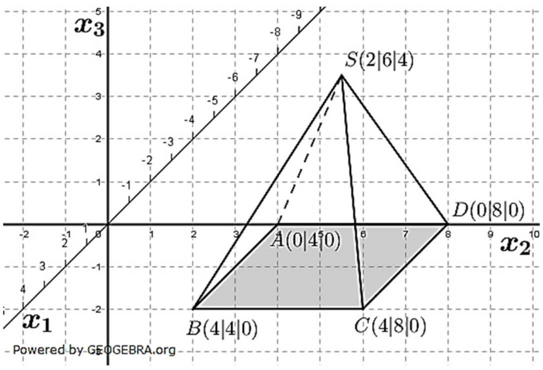
1.1 *Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$:*

Ermittlung des Schnittpunktes der Diagonalen der quadratischen Grundfläche. Dies ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spitze liegt $4\,LE$ senkrecht über diesem Schnittpunkt. Somit hat der Punkt die Koordinaten $S(2|6|4)$.

1.2 *Pyramide im räumlichen Koordinatensystem:*



1.3 *Kosten einer Beschichtung:*

Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke und insgesamt vier Mal vorhanden. Die Gesamtfläche errechnet sich aus:

$$A_{Mantel} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-16\\8\end{pmatrix}\right|$$

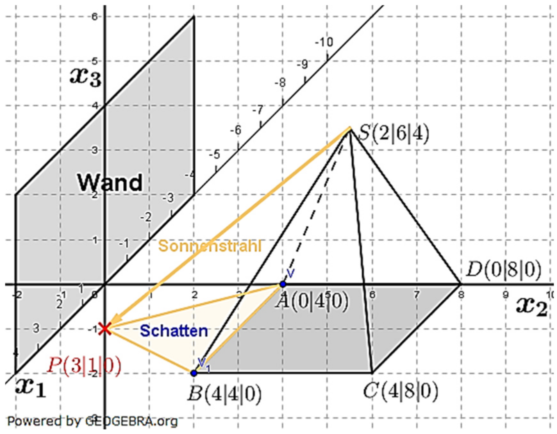
$$A_{Mantel} = 2 \cdot \sqrt{16^2 + 8^2} = 16 \cdot \sqrt{5}\, m^2$$

Kosten K:

$$K = A_{Mantel} \cdot 1500 = 16 \cdot \sqrt{5}\ m^2 \cdot 1500 \frac{€}{m^2} = 53666\, €.$$

Die Beschichtung kostet $53.666\, €$.

1.4 *Untersuchung eines Schattens:*



Wir untersuchen den Schattenwurf der Pyramiden-Spitze.

Der Sonnenstrahl folgt der Geraden s mit

$$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Beim Auftreffen des Sonnenstrahls auf dem Boden ist die x_3-Koordinate des Schattenpunktes 0.

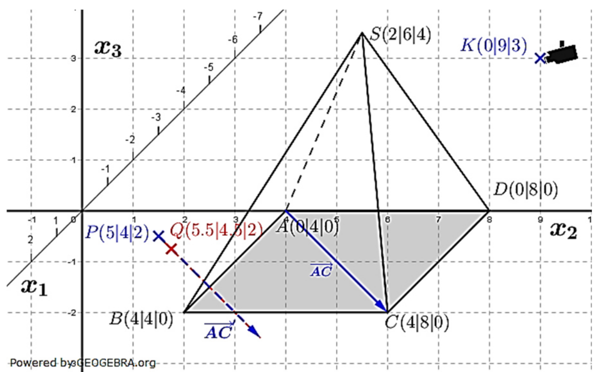
$$4 - 8r = 0$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Auftreffpunkt des Schattens in der x_1x_2*-Ebene liegt vor der* x_1x_3*-Ebene. Somit trifft der Pyramidenschatten nicht auf die fensterlose Wand.*

1.5 *Koordinaten des Punktes* Q*, an dem ein Objekt von einer Kamera erstmalig erfasst werden kann:*



Gleichung der Geraden h, auf der sich der Punkt P bewegt:

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Der gesuchte Punkt Q entspricht dem Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E, die durch die Punkte K, S und C verläuft.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{KS} \times \overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = d$
Einsetzen von $K(0|9|3)$: $d = 12$
$E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 12$
$E \cap h$:
$x_1 = 5 + 4r;\quad x_2 = 4 + 4r;\quad x_3 = 2$
$5 + 4r + 4 + 4r + 2 = 12$
$8r + 11 = 12$
$8r = 1$
$r = \frac{1}{8}$
$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Ab der Position $Q(5{,}5|4{,}5|2)$ *kann die Kamera das Objekt erfassen.*

Lösung A2/2021

2.1 *Entfernung des Flugzeugs vom Flughafenturm eine Minute nach Beginn des Landeanflug:*
Position Flugzeug eine Minute $t = 1$ nach Landanflug:
$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$
Entfernung vom Flughafenturm $S(11|14|0{,}13)$:
$\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 0{,}13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ -2{,}77 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{55^2 + 55^2 + 2{,}77^2} = 79{,}98$
Das Flugzeug ist eine Minute nach Beginn des Landeanflugs noch $80\ km$ *von der Flughafenturmspitze entfernt.*

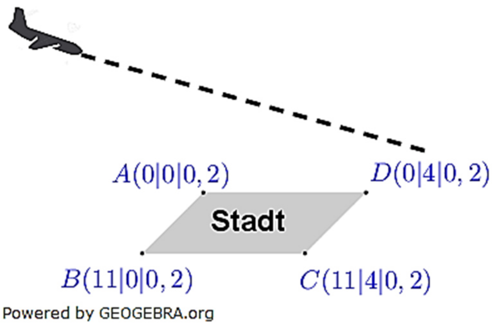
2.2 *Untersuchung, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in einen Flugraum eintritt:*
Wir bestimmen den kleinsten Abstand der Anfluggeraden mit der Rotationsachse des zylinderförmigen Luftraums.
Die beiden Geraden g und h sind windschief.
$d(g;h) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als den Richtungsvektoren und $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Verbindungsvektor der Aufpunkte der beiden Geraden.

$$d(g;h) = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -40-(-48 \\ -40-(-48) \\ 3{,}6-3{,}1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0{,}2^2 + 4^2}} = \frac{1{,}6+2}{4} = 0{,}9$$

Die kleinste Entfernung der beiden Geraden beträgt $0{,}9\ km$. Da der Radius des Luftraumes nur $0{,}8\ km$ ist, tritt das Flugzeug nicht in diesen Luftraum ein.

2.3 *Landepunkt und Winkel des Flugzeuges:*
Landepunkt: Da die Landebahn $100\,m$ über dem Meeresspiegel liegt, ist zum Zeitpunkt der Landung $x_3 = 0{,}1$.
Aus der Fluggeraden folgt:
$x_3 = 0{,}1 = 3{,}1 - 0{,}2t$
$0{,}2t = 3$
$t = 15$
$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$
Das Flugzeug landet im Punkt $L(12|12|0{,}1)$.
Winkel zwischen Flugbahn und Landebahn
Dies ist der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und der Ebene, in der die Landebahn liegt. Schnittwinkel Gerade – Ebene mit dem Sinus.
$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n_E} \circ \vec{u}|}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4^2+4^2+0{,}2^2}} = \frac{|-0{,}2|}{5{,}66} = 0{,}03534$$
$\varphi = \arcsin(\varphi) = 2{,}03\,°$
Der Landewinkel des Flugzeuges beträgt etwa $2°$.

2.4.1 Koordinaten: $B(11|0|0{,}2)$; $D(0|4|0{,}2)$
2.4.2 Nachdem wir uns über die Lage der Eckpunkte der Stadt klar geworden sind, stellen wir fest, dass die geringste Höhe des Anflugs am rechten Ende des Rechtecks ist. Wir stellen eine Ebene E parallel zur x_1x_3-Ebene durch den Punkt C (oder d) auf und schneiden diese Ebene mit der Fluggeraden.



$E\colon\ x_2 = 4$
$E \cap g$
$-48 + 4t = 4$
$4t = 52$
$t = 13$
Durchstoßpunkt des Flugzeuges mit E:
$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$
Das Flugzeug überfliegt den rechten Rand der Stadt in $x_3 = 500\,m$ *Höhe. Da die Stadt in der Höhe* $200\,m$ *hoch liegt, wird die Mindesthöhe zu jedem Zeitpunkt eingehalten.*