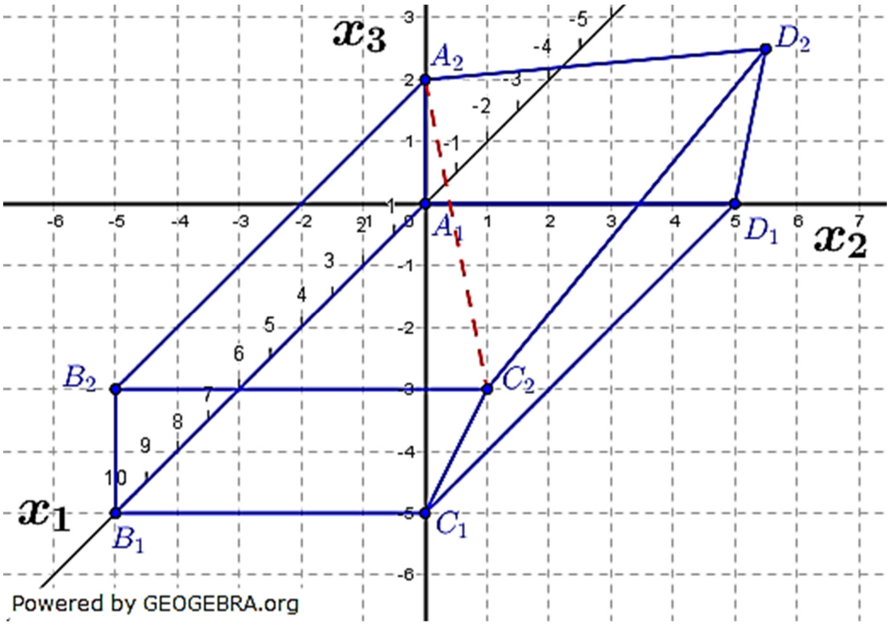
Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2020-2021

Lösung A1/2020

1.1 *Objekt im Koordinatensystem:*



1.2 *Kosten der Trapezfläche:*

$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{50+60}{2} \cdot 20 = 1100\ m^2.$

$K_{Trapez} = A_{Trapez} \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 1100 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 352000{,}00\ €.$

1\. 3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ führt zu zwei Flächen. Fläche 1 geht durch die Punkte A_2, B_2 und C_2, Fläche 2 durch die Punkte A_2, C_2 und D_2. Gesucht ist der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Ebene 1:

$E_1{:}\ \ x_3 = 2 \ \rightarrow\ \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene 2:

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = (\overrightarrow{C_2A_2}) \times (\overrightarrow{C_2D_2}) = \begin{pmatrix} 0-10 \\ 0-6 \\ 2-2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-10 \\ 5{,}5-6 \\ 2{,}5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -55 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+25+3025}} = \frac{55}{\sqrt{3059}}$

$\varphi = arccos\left(\frac{55}{\sqrt{3059}}\right) = 6{,}05\ °$

Im Innern des Gebäudes liegt jedoch ein stumpfer Winkel zwischen den beiden Flächen vor, somit $\varphi + 180\ °$.

Die beiden Flächen schließen im Inneren einen Winkel von etwa $106\ °$ *ein.*

1.4.1 *Gleichung der Gerade durch die Punkte C_1 und C_2 :*

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC_1} + r \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10-10 \\ 6-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Gerade durch die Punkte D_1 und D_2 :

$$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD_1} + s \cdot \overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5{,}5-5 \\ 2{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Allgemeiner Punkt auf g: $P(10|5+r|2r)$
Allgemeiner Punkt auf h: $Q(0|5+0{,}5s|2{,}5s)$
Nach Aufgabenstellung sollen die Laserstrahlen auf gleicher Höhe sein, also:

$2r = 2{,}5s$ ➔ $s = \frac{4}{5}r$

$P(10|5+r|2r)$
$Q(0|5+0{,}4r|2r)$

Abstand zweier Punkte über den Satz des Pythagoras:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(10-0)^2 + (5+r-5-0{,}4r)^2} = \sqrt{100+0{,}36r^2}$

Der Abstand soll $212{,}5\,m$ betragen, also $|\overrightarrow{PQ}| = 21{,}25$

$\sqrt{100+0{,}36r^2} = 21{,}25 \qquad |\ ^2$
$100 + 0{,}36r^2 = 451{,}5625$
$0{,}36r^2 = 351{,}5625$
$r^2 = 976{,}5625 \qquad |\ \sqrt{\ }$
$r = 31{,}25$

Wegen $x_3 = 2r$ haben die beiden Laserstrahlen in einer Höhe von $625\,m$ einen Abstand von $212{,}5\,m$.

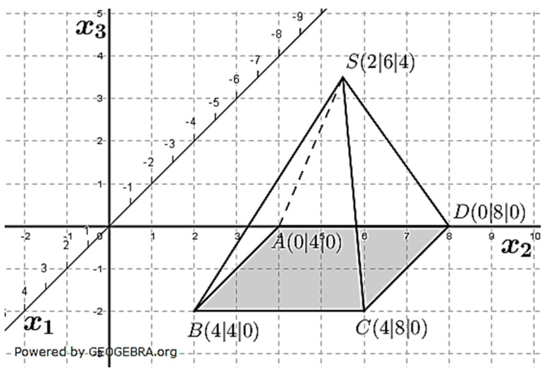
Lösung A1/2021

1.1 *Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$:*
Ermittlung des Schnittpunktes der Diagonalen der quadratischen Grundfläche. Dies ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spitze liegt $4\,LE$ senkrecht über diesem Schnittpunkt. Somit hat der Punkt die Koordinaten $S(2|6|4)$.

1.2 *Pyramide im räumlichen Koordinatensystem:*



Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2020-2021

1.3 *Kosten einer Beschichtung:*

Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke und insgesamt vier Mal vorhanden. Die Gesamtfläche errechnet sich aus:

$$A_{Mantel} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-16\\8\end{pmatrix}\right|$$

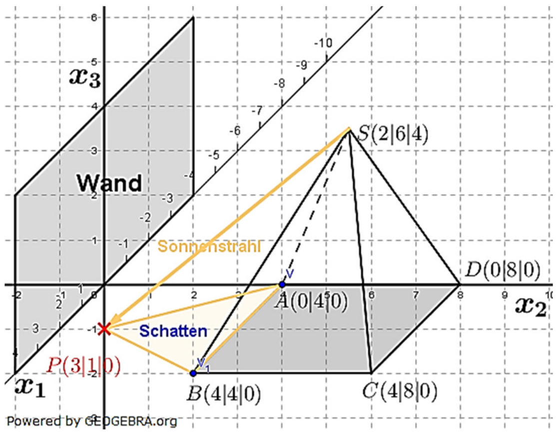
$$A_{Mantel} = 2 \cdot \sqrt{16^2 + 8^2} = 16 \cdot \sqrt{5}\, m^2$$

Kosten K:

$$K = A_{Mantel} \cdot 1500 = 16 \cdot \sqrt{5}\ m^2 \cdot 1500 \frac{€}{m^2} = 53666\,€.$$

Die Beschichtung kostet $53.666\,€$*.*

1.4 *Untersuchung eines Schattens:*



Wir untersuchen den Schattenwurf der Pyramiden-Spitze.

Der Sonnenstrahl folgt der Geraden s mit

$$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Beim Auftreffen des Sonnenstrahls auf dem Boden ist die x_3-Koordinate des Schattenpunktes 0.

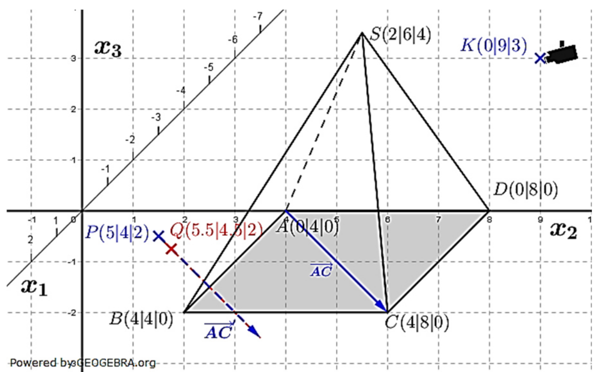
$$4 - 8r = 0$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Auftreffpunkt des Schattens in der x_1x_2*-Ebene liegt vor der* x_1x_3*-Ebene. Somit trifft der Pyramidenschatten nicht auf die fensterlose Wand.*

1.5 *Koordinaten des Punktes* Q*, an dem ein Objekt von einer Kamera erstmalig erfasst werden kann:*



Gleichung der Geraden h, auf der sich der Punkt P bewegt:

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Der gesuchte Punkt Q entspricht dem Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E, die durch die Punkte K, S und C verläuft.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{KS} \times \overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = d$

Einsetzen von $K(0|9|3)$: $d = 12$

$E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 12$

$E \cap h$:

$x_1 = 5 + 4r;\quad x_2 = 4 + 4r;\quad x_3 = 2$

$5 + 4r + 4 + 4r + 2 = 12$

$8r + 11 = 12$

$8r = 1$

$r = \frac{1}{8}$

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ab der Position $Q(5{,}5|4{,}5|2)$ kann die Kamera das Objekt erfassen.

Lösung A2/2021

2.1 *Entfernung des Flugzeugs vom Flughafenturm eine Minute nach Beginn des Landeanflug:*

Position Flugzeug eine Minute $t = 1$ nach Landanflug:

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$

Entfernung vom Flughafenturm $S(11|14|0{,}13)$:

$\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 0{,}13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ -2{,}77 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{55^2 + 55^2 + 2{,}77^2} = 79{,}98$

Das Flugzeug ist eine Minute nach Beginn des Landeanflugs noch $80\ km$ von der Flughafenturmspitze entfernt.

2.2 *Untersuchung, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in einen Flugraum eintritt:*

Wir bestimmen den kleinsten Abstand der Anfluggeraden mit der Rotationsachse des zylinderförmigen Luftraums.

Die beiden Geraden g und h sind windschief.

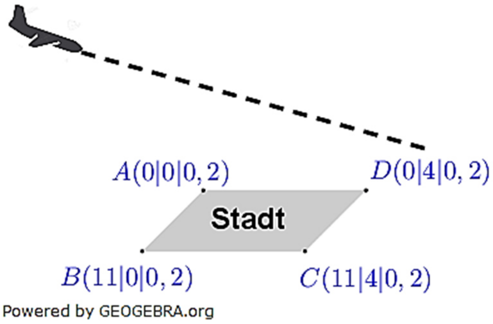
$d(g;h) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als den Richtungsvektoren und $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Verbindungsvektor der Aufpunkte der beiden Geraden.

$$d(g;h) = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -40-(-48 \\ -40-(-48) \\ 3{,}6-3{,}1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0{,}2^2 + 4^2}} = \frac{1{,}6+2}{4} = 0{,}9$$

Die kleinste Entfernung der beiden Geraden beträgt $0{,}9\ km$. Da der Radius des Luftraumes nur $0{,}8\ km$ ist, tritt das Flugzeug nicht in diesen Luftraum ein.

2.3 *Landepunkt und Winkel des Flugzeuges:*
Landepunkt: Da die Landebahn $100\,m$ über dem Meeresspiegel liegt, ist zum Zeitpunkt der Landung $x_3 = 0{,}1$.
Aus der Fluggeraden folgt:
$x_3 = 0{,}1 = 3{,}1 - 0{,}2t$
$0{,}2t = 3$
$t = 15$
$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
Das Flugzeug landet im Punkt $L(12|12|0{,}1)$.
Winkel zwischen Flugbahn und Landebahn
Dies ist der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und der Ebene, in der die Landebahn liegt. Schnittwinkel Gerade – Ebene mit dem Sinus.
$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n_E} \circ \vec{u}|}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4^2+4^2+0{,}2^2}} = \frac{|-0{,}2|}{5{,}66} = 0{,}03534$
$\varphi = \arcsin(\varphi) = 2{,}03\,°$
Der Landewinkel des Flugzeuges beträgt etwa $2°$.

2.4.1 Koordinaten: $B(11|0|0{,}2)$; $D(0|4|0{,}2)$
2.4.2 Nachdem wir uns über die Lage der Eckpunkte der Stadt klar geworden sind, stellen wir fest, dass die geringste Höhe des Anflugs am rechten Ende des Rechtecks ist. Wir stellen eine Ebene E parallel zur x_1x_3-Ebene durch den Punkt C (oder d) auf und schneiden diese Ebene mit der Fluggeraden.



E: $x_2 = 4$
$E \cap g$
$-48 + 4t = 4$
$4t = 52$
$t = 13$
Durchstoßpunkt des Flugzeuges mit E:
$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$
Das Flugzeug überfliegt den rechten Rand der Stadt in $x_3 = 500\,m$ *Höhe. Da die Stadt in der Höhe* $200\,m$ *hoch liegt, wird die Mindesthöhe zu jedem Zeitpunkt eingehalten.*