



Aufgabe A1/2022

1 Betrachtet wird das Abtauchen eines U-Bootes (siehe Abbildung). Die Meeresoberfläche wird durch die x_1x_2 -Ebene dargestellt. Das punktförmige Modell des U-Bootes bewegt sich zu Beginn mit konstanter Geschwindigkeit vom Start im Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb einer

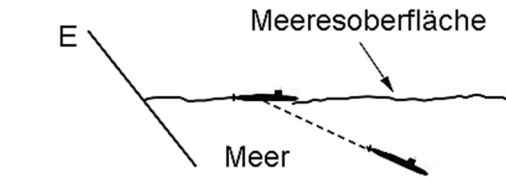


Abbildung: Abtauchen eines U-Bootes

Powered by GEOGEBRA.org

Minute geradlinig zum Punkt $(60|60|-8)$. Danach behält das U-Boot die Richtung und zunächst auch die Geschwindigkeit bei.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m) in der Realität. Die Ebene E mit $E: x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0$ modelliert für $x_3 \leq 0$ die Grenze zwischen dem Meer und dem unter Wasser liegenden Land.

- 1.1 Geben Sie den Punkt P an, an dem sich das U-Boot nach 2 Minuten befindet.
 Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von P zu O . (2P)
- 1.2 Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde. (2P)
- 1.3 Ermitteln Sie die Schnittgerade von E mit der x_1x_2 -Ebene. Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext. (3P)
- 1.4 Ab einer Tiefe von 120 m beschreibt der Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Geschwindigkeit des U-Bootes (in Meter pro Minute) beim Abtauchen in den anschließenden 60 Minuten. Danach ist das Abtauchen des U-Bootes beendet.
 - 1.4.1 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
 - (1) „Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab 120 m Tiefe um 75% .“
 - (2) „Die Geschwindigkeit ändert sich 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens.“ (2P)
 - 1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Bootes zu E mit zunehmender Tiefe vergrößert. (3P)
 - 1.4.3 Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Bootes zu der durch E modellierten Grenze während der letzten 60 Minuten des Abtauchens. (3P)

Aufgabe A2/2022

- 2 Betrachtet wird das Modell einer Kirche. Der Kirchturm besteht aus einem Quader mit aufgesetzter Pyramide. Einer Bauzeichnung kann man Folgendes entnehmen:
Die Punkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$ und $D(0|0|0)$ bilden die Grundfläche. Das Dach hat die vier Eckpunkte $E(2|0|6)$, $F(2|2|6)$, $G(0|2|6)$, $H(0|0|6)$ und die Turmspitze $S(1|1|8)$.
Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter (m).
- 2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem. (3P)
- 2.2 Das Dach des Kirchturmes soll vollständig gedeckt werden. Hierfür werden Ziegel verwendet, die pro Ziegel $0,12 m^2$ abdecken. Die Ziegel werden auf Paletten mit jeweils 200 Ziegeln geliefert. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten. (3P)
- 2.3 Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ modelliert zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes.
- 2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. die x_1x_2 -Ebene) trifft. (2P)
- 2.3.2 Auf der Turmspitze S befindet sich ein senkrecht stehendes Kreuz der Höhe h . Der Kirchturm und das Kreuz werfen einen Schatten. Der Schattenpunkt des höchsten Punktes ist $P(3,1|5,2|0)$. Bestimmen Sie die Höhe h . (3P)
- 2.4 Im Kirchturm soll eine Glocke eingebaut werden. Die Position der Glocke wird im Modell mit Q bezeichnet. Der Abstand von Q zu den Eckpunkten E, F, G und H des Daches soll jeweils dreimal so groß sein wie der Abstand von Q zur Turmspitze S . Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q . (4P)

Lösung A1/2022

1.1 Koordinaten des Punktes P des U-Bootes nach 2 Minuten:

Geradengleichung des Bootes:

$$g: \vec{x} = \vec{o} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \text{ in Minuten}$$

$$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Das U-Boot befindet sich nach 2 Minuten im Punkt $P(120|120|-16)$.

Tiefe und Abstand des Punktes P zu O:

Die x_3 -Koordinate von P gibt die Tiefe des U-Bootes an. Wegen des Maßstabs 1 LE gleich 1 m, befindet sich das U-Boot in 16 m Tiefe.

$$d(P; O) = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{120^2 + 120^2 + 16^2} = 170,5$$

Die Entfernung des Bootes vom Ursprung beträgt etwa 170,5 m.

1.2 Geschwindigkeit des Bootes in km/h:

$$v = \left| \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} \right| \frac{m}{min} = \sqrt{60^2 + 60^2 + 8^2} \frac{m}{min} = 85,2 \frac{m}{min} = 5112 \frac{m}{h}$$

$$v \approx 5,1 \frac{km}{h}$$

1.3 Schnittgerade von E mit der x_1x_2 -Ebene:

$$x_1x_2\text{-Ebene } F: x_3 = 1$$

$$E: x_1 + x_2 + 10x_3 = -200$$

$$F: x_3 = 0$$

$$E \cap F$$

$$E: x_1 + x_2 = -200$$

$$x_1 + x_2 = -210$$

Wir wählen eine Variable frei mit $x_2 = t$

$$x_1 + t = -200$$

$$x_1 = -200 - t$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -200 - t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Daraus die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -210 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2022-2023

Bedeutung der Schnittgeraden im Sachkontext:

Die Gerade h modelliert die Grenze zwischen Meer und Land auf Höhe der Meeresoberfläche.

1.4.1 Begründung von Aussagen:

(1) Geschwindigkeit ab 120 m Tiefe:

$$v_1 = \left| \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{15^2 + 15^2 + 2^2} = 21,3 \frac{m}{min}$$

Geschwindigkeit bis Tiefe (siehe 1.2) $v = 85,2 \frac{m}{min}$

$$\frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{21,3}{85,2} \cdot 100 = 25 \%$$

Das Boot hat noch 25 % seiner ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h. es fährt um 75 % langsamer.

(2) 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens muss dieses eine Tiefe von 120 m erreicht haben. Ist dies der Fall. So stimmt die Aussage.

$$\overrightarrow{OP^*} = 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Das Boot hat 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens eine Tiefe von 120 m erreicht.

1.4.2 Vergrößerung des Abstands des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe:

Die neue Gerade ab einer Tiefe von 120 m lautet:

$$g_{120}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \text{ in Minuten}$$

Wir berechnen den Abstand der Geraden zu E über die HNF.

$$E: \frac{x_1 + x_2 + 10x_3 + 200}{\sqrt{102}} = 0$$

Wir setzen den Punkt $Q(900 + 15t | 900 + 15t | -120 - 2t)$ ein:

$$d(E; Q) = \frac{|900 + 15t + 900 + 15t - 1200 - 20t + 200|}{\sqrt{102}} = \frac{|800 + 10t|}{\sqrt{102}}$$

Wegen $t \geq 0$ nimmt der Abstand zu E mit größer werdender Tiefe zu.

1.4.3 Mittlerer Abstand zu E während der letzten 60 Minuten:

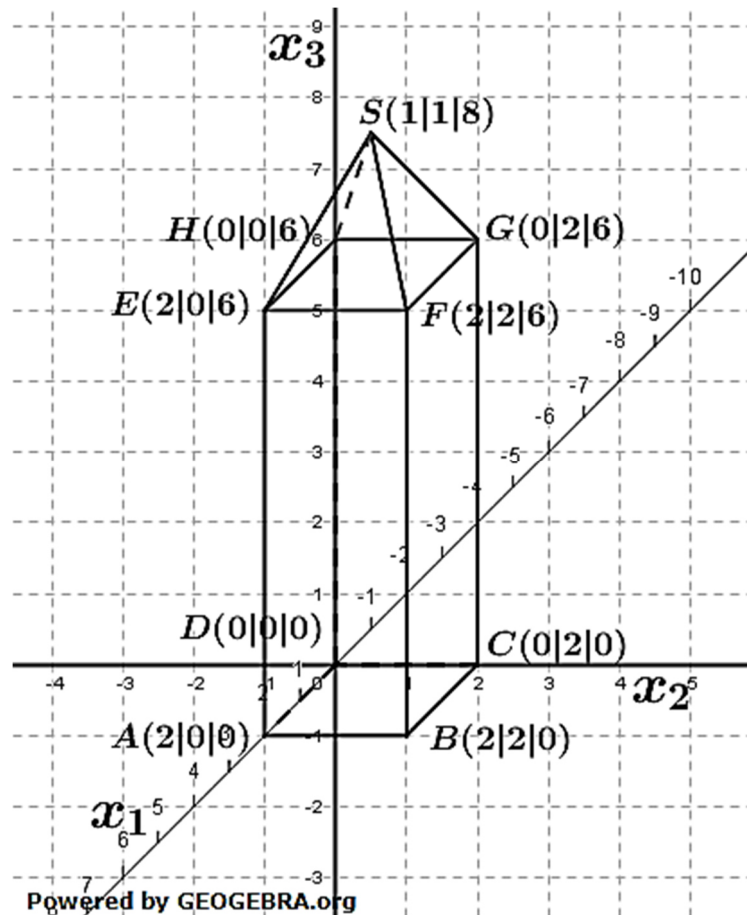
$$d_{15}(E; Q) = \frac{800 + 10 \cdot 0}{\sqrt{102}} = 79,21 \text{ m}$$

$$d_{75}(E; Q) = \frac{800 + 10 \cdot 60}{\sqrt{102}} = 138,62 \text{ m}$$

$$d_{\overline{m}}(E; Q) = \frac{d_{75}(E; Q) + d_{15}(E; Q)}{2} = \frac{138,62 + 79,21}{2} = 108,9 \text{ m}$$

Lösung A2/2022

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:



2.2 Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:

Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{EF}| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{IS}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ FE}$$

Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2022-2023

$$A_{Dach} = 4 \cdot A_{Dreieck} = 4 \cdot 2,24 \text{ FE} = 8,94 \text{ FE}$$

Wegen Maßstab $1 \text{ LE} = 10 \text{ m}$ ist $1 \text{ FE} = 100 \text{ m}^2$

$$A_{Dach} = 894 \text{ m}^2$$

1 Palette Ziegeln hat $200 \cdot 0,12 \text{ m}^2 = 24 \text{ m}^2$ Fläche.

$$n_{\text{Palette}} = \frac{894}{24} = 37,25 \text{ St.}$$

Es müssen 38 Paletten geliefert werden.

2.3.1 Winkel zwischen Sonnenstrahl und x_1x_2 -Ebene:

Dies ist der Schnittwinkel zwischen einem Vektor und einer Ebene. Berechnung über:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}_E|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}_E|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 60,8^\circ$$

2.3.2 Höhe eines Kreuzes:

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Gesucht ist der Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden s des Sonnenlichts durch den Punkt P mit der Geraden a der Symmetrieachse des Turms. Die Differenz der x_3 -Koordinate von Q und S ergibt dann die Höhe des Kreuzes.

Gerade s :

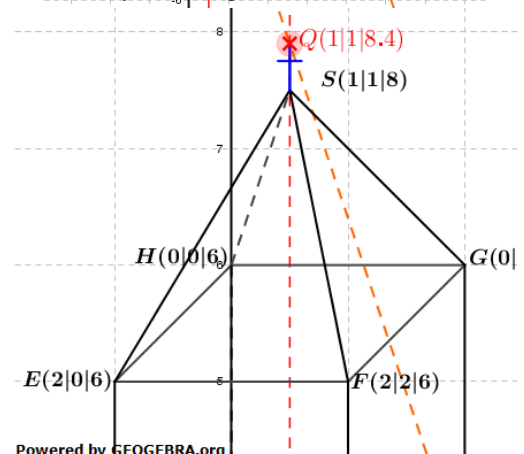
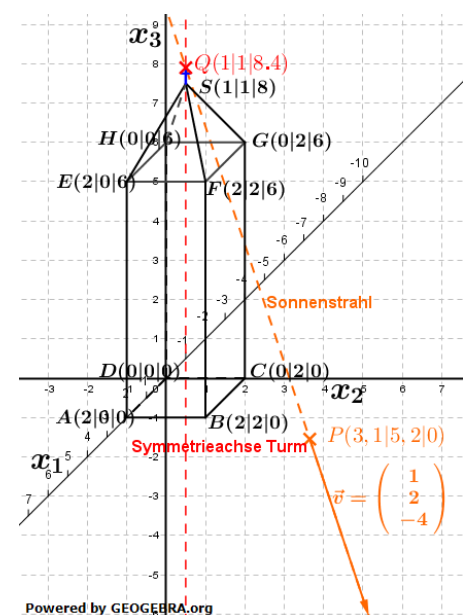
$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gerade a :

$$a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s \cap a$:

$$\begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) 2022-2023

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,1 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,1 \\ -4,2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad r = -2,1$$

$$(III) \quad -4r - s = 8$$

$$-4 \cdot (-2,1) = 8 + s$$

$$8,4 - 8 = s$$

$$s = 0,4$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8,4 \end{pmatrix}$$

$$h_{\text{Kreuz}} = q_3 - s_3 = 8,4 - 8 = 0,4$$

Das Kreuz ist 4 m hoch.

2.4 Ermittlung eines Punktes Q einer Glocke:

Der Punkt $Q(1|1|q_3)$ liegt auf der Symmetrieachse des Turms.

Es soll gelten $|\overrightarrow{QE}| = |\overrightarrow{QF}| = |\overrightarrow{QG}| = |\overrightarrow{QH}| = 3 \cdot |\overrightarrow{QS}|$

$$\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 8-q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8-q_3 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{QS}| = 8 - q_3$$

$$\overrightarrow{QE} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 6-q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6-q_3 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{QE}| = \sqrt{1+1+(6-q_3)^2}$$

$$3 \cdot |\overrightarrow{QS}| = |\overrightarrow{QE}|$$

$$3 \cdot (8 - q_3) = \sqrt{2 + (6 - q_3)^2} \quad | \quad \uparrow^2$$

$$9 \cdot (8 - q_3)^2 = 2 + (6 - q_3)^2$$

$$9 \cdot (64 - 16q_3 + q_3^2) = 2 + 36 - 12q_3 + q_3^2$$

$$9q_3^2 - 144q_3 + 576 = q_3^2 - 12q_3 + 38$$

$$8q_3^2 - 132q_3 + 538 = 0 \quad | \quad :8$$

$$q_3^2 - 16,5q_3 + 67,25 = 0$$

$$q_{3,1,2} = 8,25 \pm \sqrt{68,0625 - 67,25} = 8,25 \pm 0,9$$

$$q_{3_1} = 9,15; \quad q_{3_2} = 7,35$$

$q_{3_1} = 9,15$ entfällt, da außerhalb des Turms.

$$q_3 = 7,35.$$

Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $Q(1|1|7,35)$.