Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) ab 2022-2023

Aufgabe A1/2022

1 Betrachtet wird das Abtauchen eines U-Bootes (siehe Abbildung). Die Meeresoberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene dargestellt. Das punktförmige Modell des U-Boots bewegt sich zu Beginn mit konstanter Geschwindigkeit vom Start im Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb einer Minute geradlinig zum Punkt $(60|60|-8)$. Danach behält das U-Boot die Richtung und zunächst auch die Geschwindigkeit bei.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m) in der Realität. Die Ebene E mit $E\colon\ x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0$ modelliert für $x_3 \le 0$ die Grenze zwischen dem Meer und dem unter Wasser liegenden Land.

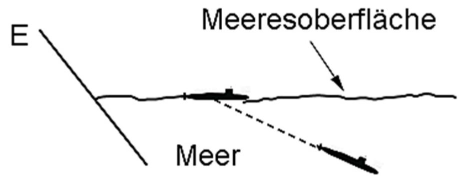

Abbildung: Abtauchen eined U-Bootes

Powered by GEOGEBRA.org

1.1 Geben Sie den Punkt P an, an dem sich das U-Boot nach 2 Minuten befindet.
Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von P zu O. (2P)

1.2 Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde. (2P)

1.3 Ermitteln Sie die Schnittgerade von E mit der x_1x_2-Ebene.
Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext. (3P)

1.4 Ab einer Tiefe von $120\,m$ beschreibt der Vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Geschwindigkeit des U-Boots (in Meter pro Minute) beim Abtauchen in den anschließenden 60 Minuten. Danach ist das Abtauchen des U-Boots beendet.

1.4.1 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
(1) *„Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab* $120\,m$ *Tiefe um* $75\,\%$*."*
(2) *„Die Geschwindigkeit ändert sich* 15 *Minuten nach Beginn des Abtauchens."* (2P)

1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe vergrößert. (3P)

1.4.3 Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Boots zu der durch E modellierten Grenze während der letzten 60 Minuten des Abtauchens. (3P)

Aufgabe A2/2022

2 Betrachtet wird das Modell einer Kirche. Der Kirchturm besteht aus einem Quader mit aufgesetzter Pyramide. Einer Bauzeichnung kann man Folgendes entnehmen:
Die Punkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$ und $D(0|0|0)$ bilden die Grundfläche. Das Dach hat die vier Eckpunkte $E(2|0|6)$, $F(2|2|6)$, $G(0|2|6)$, $H(0|0|6)$ und die Turmspitze $S(1|1|8)$.
Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter (m).

2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem. (3P)

2.2 Das Dach des Kirchturmes soll vollständig gedeckt werden. Hierfür werden Ziegel verwendet, die pro Ziegel $0{,}12\,m^2$ abdecken. Die Ziegel werden auf Paletten mit jeweils 200 Ziegeln geliefert. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten. (3P)

2.3 Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ modelliert zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes.

2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. die x_1x_2-Ebene) trifft. (2P)

2.3.2 Auf der Turmspitze S befindet sich ein senkrecht stehendes Kreuz der Höhe h. Der Kirchturm und das Kreuz werfen einen Schatten. Der Schattenpunkt des höchsten Punktes ist $P(3{,}1|5{,}2|0)$. Bestimmen Sie die Höhe h. (3P)

2.4 Im Kirchturm soll eine Glocke eingebaut werden. Die Position der Glocke wird im Modell mit Q bezeichnet. Der Abstand von Q zu den Eckpunkten E, F, G und H des Daches soll jeweils dreimal so groß sein wie der Abstand von Q zur Turmspitze S.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q. (4P)