Abituraufgaben Vektorgeometrie BG (Teil 4) *2022-2023*

Lösung A1/2022

1.1 *Koordinaten des Punktes P des U-Bootes nach 2 Minuten:*

Geradengleichung des Bootes:

$$g:\quad \vec{x} = \vec{o} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix};\ \ t \in \mathbb{R} \text{ in Minuten}$$

$$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Das U-Boot befindet sich nach 2 Minten im Punkt $P(120|120|-16)$.

Tiefe und Abstand des Punktes P zu O:

Die x_3-Koordinate von P gibt die Tiefe des U-Bootes an. Wegen des Maßstabs $1\,LE$ gleich $1\,m$, befindet sich das U-Boot in $16\,m$ Tiefe.

$$d(P;O) = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{120^2 + 120^2 + 16^2} = 170{,}5$$

Die Entfernung des Bootes vom Ursprung beträgt etwa $170{,}5\,m$.

1.2 *Geschwindigkeit des Bootes in km/h:*

$$v = \left|\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix}\right| \frac{m}{min} = \sqrt{60^2 + 60^2 + 8^2}\,\frac{m}{min} = 85{,}2\,\frac{m}{min} = 5112\,\frac{m}{h}$$

$$v \approx 5{,}1\,\frac{km}{h}.$$

1.3 *Schnittgerade von E mit der x_1x_2-Ebene:*

x_1x_2-Ebene F: $x_3 = 1$

$E:\quad x_1 + x_2 + 10x_3 = -200$

$F:\ x_3 = 0$

$E \cap F$

$E:\quad x_1 + x_2 = -200$

$x_1 + x_2 = -210$

Wir wählen eine Variable frei mit $x_2 = t$

$x_1 + t = -200$

$x_1 = -200 - t$

$$\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -200 - t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Daraus die Geradengleichung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -210 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bedeutung der Schnittgeraden im Sachkontext:
Die Gerade h modelliert die Grenze zwischen Meer und Land auf Höhe der Meeresoberfläche.

1.4.1 *Begründung von Aussagen:*

(1) Geschwindigkeit ab $120\,m$ Tiefe:

$$v_1 = \left|\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + 15^2 + 2^2} = 21{,}3\,\frac{m}{min}$$

Geschwindigkeit bis Tiefe (siehe 1.2) $v = 85{,}2\,\frac{m}{min}$

$$\frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{21{,}3}{85{,}2} \cdot 100 = 25\,\%$$

Das Boot hat noch $25\,\%$ seiner ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h. es fährt um $75\,\%$ langsamer.

(2) 15 Minten nach Beginn des Abtauchens muss dieses eine Tiefe von $120\,m$ erreicht haben. Ist dies der Fall. So stimmt die Aussage.

$$\overrightarrow{OP^*} = 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Das Boot hat 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens eine Tiefe von $120\,m$ erreicht.

1.4.2 Vergrößerung des Abstands des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe:

Die neue Gerade ab einer Tiefe von $120\,m$ lautet:

$$g_{120}:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R} \text{ in Minuten}$$

Wir berechnen den Abstand der Geraden zu E über die HNF.

$$E:\ \frac{x_1 + x_2 + 10x_3 + 200}{\sqrt{102}} = 0$$

Wir setzen den Punkt $Q(900 + 15t|900 + 15t| - 120 - 2t)$ ein:

$$d(E;Q) = \frac{|900 + 15t + 900 + 15t - 1200 - 20t + 200|}{\sqrt{102}} = \frac{|800 + 10t|}{\sqrt{102}}$$

Wegen $t \geq 0$ nimmt der Abstand zu E mit größer werdender Tiefe zu.

1.4.3 *Mittlerer Abstand zu E während der letzten 60 Minuten:*

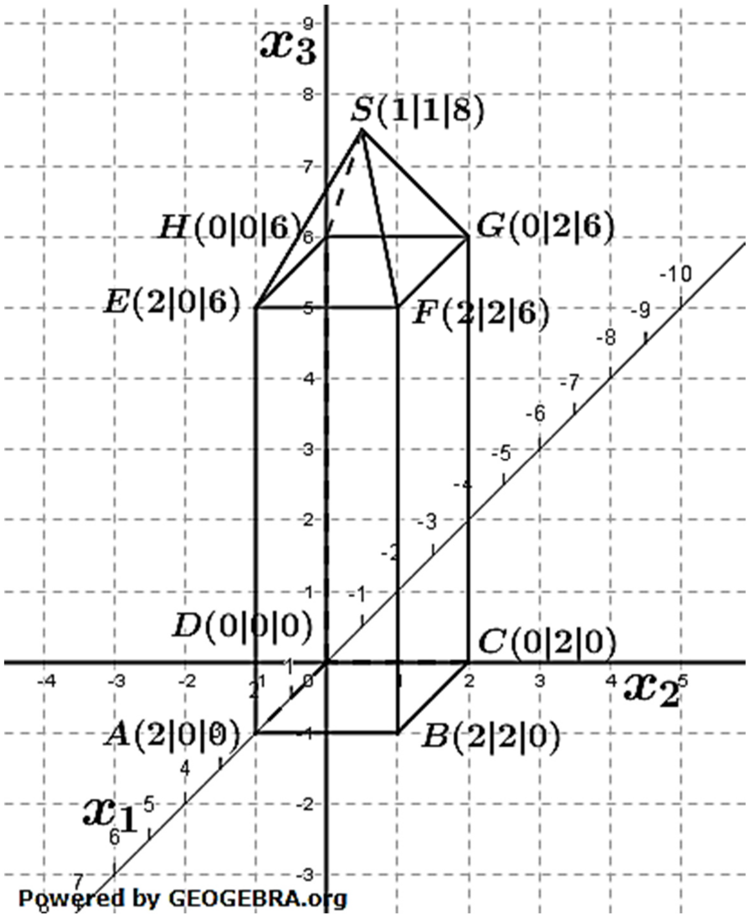
$$d_{15}(E;Q) = \frac{800 + 10 \cdot 0}{\sqrt{102}} = 79{,}21\,m$$

$$d_{75}(E;Q) = \frac{800 + 10 \cdot 60}{\sqrt{102}} = 138{,}62\,m$$

$$d_{\overline{m}}(E;Q) = \frac{d_{75}(E;Q) + d_{75}(E;Q)}{2} = \frac{138{,}62 + 79{,}21}{2} = 108{,}9\,m$$

Lösung A2/2022

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:



2.2 *Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:*
Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{EF}| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{IS}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}24\ FE$$

$A_{Dach} = 4 \cdot A_{Dreieck} = 4 \cdot 2{,}24\, FE = 8{,}94\, FE$

Wegen Maßstab $1\, LE = 10\, m$ ist $1\, FE = 100\, m^2$

$A_{Dach} = 894\, m^2$

1 Palette Ziegeln hat $200 \cdot 0{,}12\, m^2 = 24\, m^2$ Fläche.

$n_{Palette} = \frac{894}{24} = 37{,}25\, St.$

Es müssen 38 Paletten geliefert werden.

2.3.1 *Winkel zwischen Sonnenstrahl und x_1x_2-Ebene:*

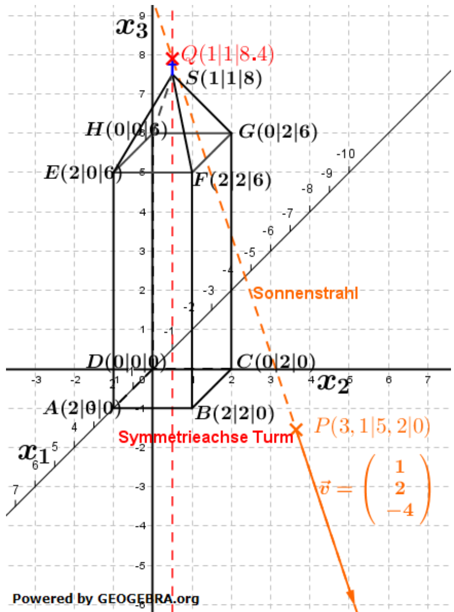
Dies ist der Schnittwinkel zwischen einem Vektor und einer Ebene. Berechnung über:

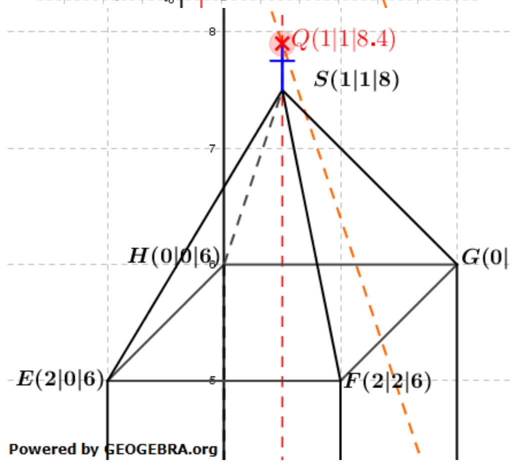
$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n_E}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 60{,}8\,°$$

2.3.2 *Höhe eines Kreuzes:*

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Gesucht ist der Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden s des Sonnlichts durch den Punkt P mit der Geraden a der Symmetrieachse des Turms. Die Differenz der x_3-Koordinate von Q und S ergibt dann die Höhe des Kreuzes.





Gerade s:

$$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gerade a:

$$a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s \cap a$:

$$\begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3{,}1\\5{,}2\\0\end{pmatrix}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}1\\-4{,}2\\8\end{pmatrix}$$

(I) $\quad r=-2{,}1$

(III) $\quad -4r-s=8$

$-4\cdot(-2{,}1)=8+s$

$8{,}4-8=s$

$s=0{,}4$

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}+0{,}4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\8{,}4\end{pmatrix}$$

$h_{Kreuz}=q_3-s_3=8{,}4-8=0{,}4$

Das Kreuz ist $4\,m$ hoch.

2.4 *Ermittlung eines Punktes Q einer Glocke:*

Der Punkt $Q(1|1|q_3)$ liegt auf der Symmetrieachse des Turms.

Es soll gelten $|\overrightarrow{QE}|=|\overrightarrow{QF}|=|\overrightarrow{QG}|=|\overrightarrow{QH}|=3\cdot|\overrightarrow{QS}|$

$$\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}1-1\\1-1\\8-q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\8-q_3\end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{QS}|=8-q_3$$

$$\overrightarrow{QE}=\begin{pmatrix}2-1\\0-1\\6-q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\6-q_3\end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{QE}|=\sqrt{1+1+(6-q_3)^2}$$

$3\cdot|\overrightarrow{QS}|=|\overrightarrow{QE}|$

$3\cdot(8-q_3)=\sqrt{2+(6-q_3)^2}\qquad|\quad\uparrow^2$

$9\cdot(8-q_3)^2=2+(6-q_3)^2$

$9\cdot(64-16_3+q_3^2)=2+36-12q_3+q_3^2$

$9q_3^2-144q_3+576=q_3^2-12q_3+38$

$8q_3^2-132q_3+538=0\qquad|\quad:8$

$q_3^2-16{,}5q_3+67{,}25=0$

$q_{3_{1,2}}=8{,}25\pm\sqrt{68{,}0625-67{,}25}=8{,}25\pm0{,}9$

$q_{3_1}=9{,}15;\quad q_{3_2}=7{,}35$

$q_{3_1}=9{,}15$ entfällt, da außerhalb des Turms.

$q_3=7{,}35$.

Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $Q(1|1|7{,}35)$.