Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2017

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

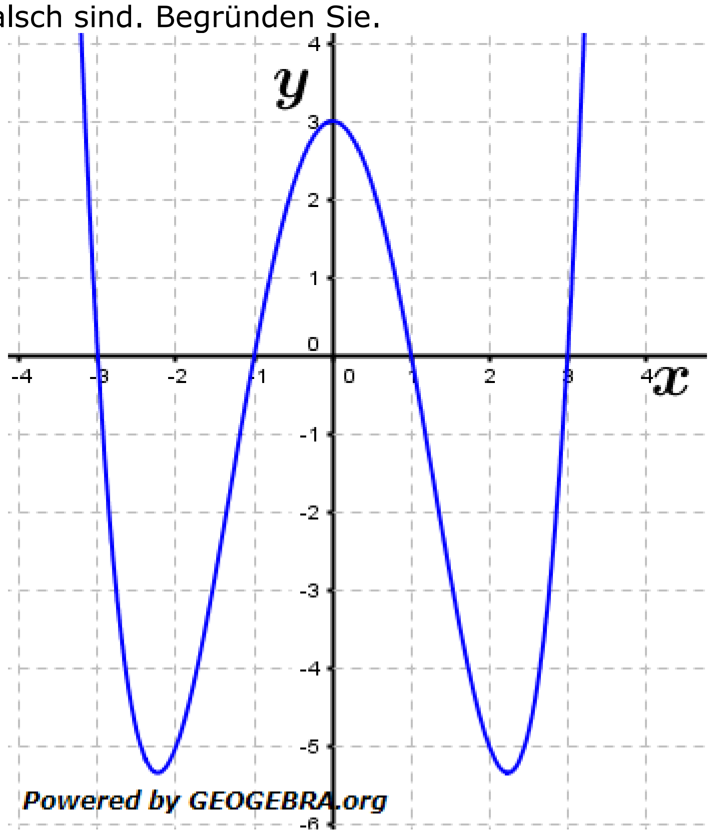
1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepnkte. **8P**
Zeichnen Sie K.

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente von K an der Stelle $x = -1$ **5P**
und die y-Achse schließen im zweiten Quadranten ein Fläche ein.
Brechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g **3P**
mit $g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2;\ x \in \mathbb{R}$
genau einen gemeinsamen Punkt mit K.
Bestimmen Sie diesen Wert von m.

1.2 C ist das Schaubild einer Funktion h.
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h'.

Entscheiden Sie, obfolgende Aussagen für den abgebildeten Bereich **4P**
wahr oder falsch sind. Begründen Sie.



(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1|h(1))$.
(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit der Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

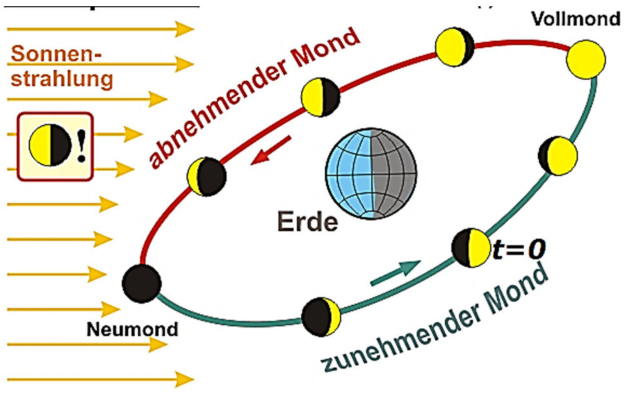
Aufgabe A2/2017

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond beständig sein Erscheinungsbild. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei zunehmender Halbmond (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right);\quad 0 \le t \le 30$$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Bebachtungsbeginn, beispielsweise ist $t = 1$ das Ende des ersten Tages.
Bei Vollmond hat der beleuchtete Anteil den Wert 1.



2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A.
Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung $A(t) = 0{,}95$ beantwortet werden kann. **4P**

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil der von Beobachtngsbeginn bis zu Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird. **4P**

2.3 Das Modell soll nun zu einem Modell abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt $t = 0$ der Beleuchtung bei Vollmond entspricht. **2P**
Bestimmen Sie hierzu einen Wert für , sodass die Funktion mit

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right);\quad 0 \le t \le 30$$

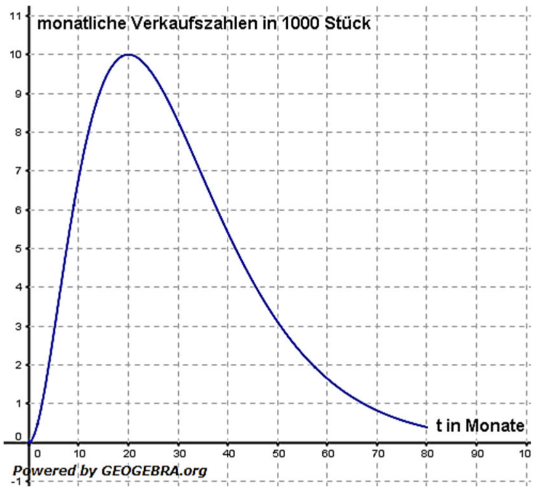
diesen Sachverhalt modelliert.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *2017*

Aufgabe A3/2017

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannten Produktionszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produktes (z.B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Einführung des Produktes auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. Einführungs- und Wachstumsphase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen.
2. Reifephase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten $95\,\%$ des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. Sättigungsphase
   - Verkaufszahlen liegen über $95\,\%$ des Maximums
4. Degenerationsphase

   beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen näherungsweise mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an. **4P**

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren. **2P**

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V bestimmen zu können: **4P**

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf?

(2) In welchem dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufs-Zahl bei 40000 ?

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Aufgabe A4/2017

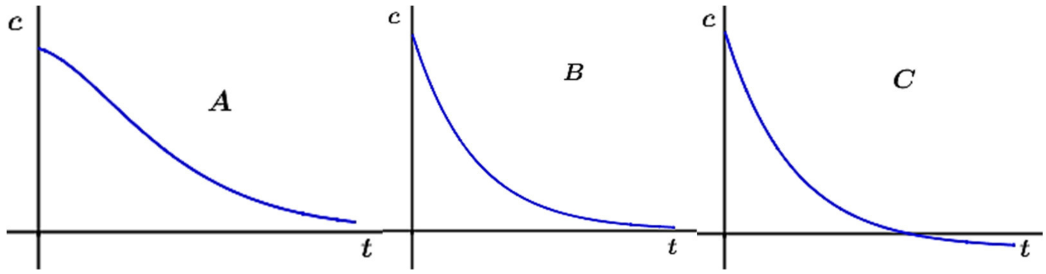
In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.
v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter $\left(\frac{mol}{l}\right)$ und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 in einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abängigkeit von t modelliert durch $c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t};\ \ t \geq\ 0$.

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch $10\ \%$ der Anfangskonzentration vorhanden sind. **4P**
Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.
In welcher Einheit wird v gemessen?

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. **2P**



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch **4P**

$$v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t};\ \ t \geq\ 0.$$

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0{,}125\frac{mol}{l}$.
Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2017

Beim Strafstoß (Elfmeter) gibt es drei mögliche Ereignisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.
(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.
(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von $80\,\%$ ein Tor.

1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: **5P**
A: Er erzielt vier Tore.
B: Er erzielt mindestens drei Tore.
C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an: **5P**
„Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.“
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sichtz keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

1.3 In einer Fußballliga wird mit $87\,\%$ aller Strafstöße ein Tor erzielt. $10\,\%$ der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt. **2P**
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

1.3.2 In iner Saison werden 70 Strafstöße gegeben. **3P**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt werden.

Aufgabe A2/2017

An einem Kiosk kann man Rubbellose kaufen. Ein Los besteht aus insgesamt 16 Feldern. Auf jedem Feld steht genau eine Zahl.
Auf acht Feldern steht die Zahl 0, auf vier Feldern die Zahl 1 und auf den restlichen vier Feldern die Zahl 5.
Die Zahlen sind zufällig auf die Felder verteilt.
Die Felder sind von einer undurchsichtigen Schicht überzogen, sodass die Zahlen erst durch Rubbeln der Felder sichtbar werden.

Rubbeln und gewinnen !

€	€	€	€
€	0	€	€
€	€	€	€
€	€	5	€

Der Käufer eines Loses muss genau zwei Felder aufrubbeln (vgl. Abbildung). Das Produkt der Zahlen, die hierbei sichtbar werden, ist der Betrag in Euro, die der Kioskbetreiber an den Losbesitzer auszahlen muss.

2.1 Eine Frau kauft ein Rubbellos und rubbelt genau zwei Felder frei. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten er folgenden Ereignisse: **3P**

A: Genau ein frei gerubbeltes Feld zeigt die Zahl 5.

B: Die Frau bekommt mindestens einen Euro ausgezahlt.

2.2 Ein Mann kauft an fünf Tage in Folge jeweils ein Los. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mann genau zweimal 25 Euro erhält. **3P**

2.3 Der Kioskbetreiber kauft die Lose für 20 Cent je Stück ein und verkauft ein Los für $2{,}50$ Euro. Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns pro Los, den der Kioskbetreiber im Mittel erwarten kann. **4P**

2.4 Ein Kioskbetreiber notiert immer am Ende des Tages die Anzahl der an diesem Tag verkauften Rubbellose. Ein Student, der als Aushilfe am Kiosk arbeitet, wertet diese Daten aus: Im Mittel werden 17 Lose pro Tag verkauft, wobei die Standardabweichung 4 beträgt. **5P**

Der Student macht folgende Annahmen:

(1) Die Anzahl n der Kunden, die den Kiosk aufsuchen, ist an jedem Tag gleich.

(2) Die Kunden kaufen unabhängig voneinander entweder genau ein oder aber kein Rubbellos.

Bestimmen Sie den Wert für n, den der Student unter der Annahme Einer Binomialverteilung ermittelt.

Welche Information liefert die Sigma-Regel $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 68{,}3\,\%$ dem Studenten in diesem Sachzusammenhang?

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1.1 Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = 12$.

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse. **4P**
Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.
Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

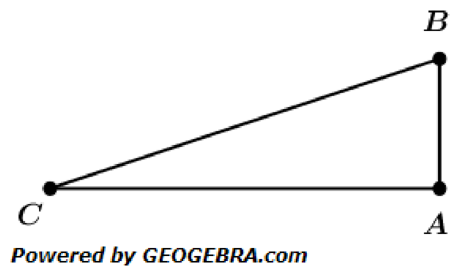
1.1.2 Bestimmen Sie a und b, sodass die Ebene E in Normalenform als **2P**

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1|0|1)$ zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat. **3P**

1.2 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|2)$ und $B(0|0|4)$.
Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:
(1) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$
(2) $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch. **2P**

1.2.2 Bei Rotation der Fläche um die Achse $\overline{AB}$ entsteht ein Rotations-Körper. **4P**
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.
Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten $(c|c|2)$ mit $c > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von c.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

1.1 Ein Unternehmen stellt aus den beiden Rohstoffen R1 und R2 die drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 her. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die beiden Endprodukte E1 und E2.
Die benötigten Rohstoffe je Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Zwischenprodukte sowie die erforderlichen Zwischenprodukte zur Produktion je einer ME der Endprodukte sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Rohstoff-Zwischenprodukt

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	a
R_2	2	1	1

Zwischen-Endprodukt

	E_1	E
Z_1	1	0
Z_2	0	2
Z_3	2	1

Rohstoff-Endprodukt

	E_1	E
R_1	5	4
R_2	4	3

1.1.1 Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat. **2P**

1.1.2 Täglich werden 5 ME von E1 und 10 ME von E2 hergestellt. **2P**

1.1.2.1 Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung.

1.1.2.2 Betrachten Sie die Matrizen

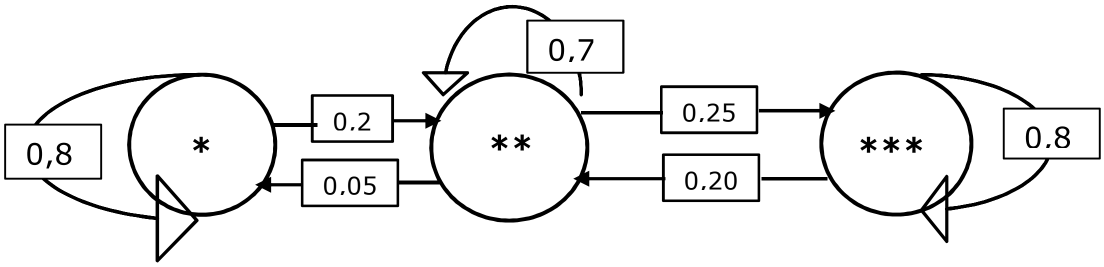
$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endprodukt-Matrix?
Begründen Sie.
Aufgrund von Problemen in der Produktion wurden an einem Tag nur 43 ME von R1 und 33 ME von R2 verarbeitet. **5P**
Bestimmen Sie, wie viele ME von E1 und E2 an diesem Tag produziert wurden.

1.2 Ein Institut prüft jährlich die Wasserqualität von Stränden in einer Urlaubsregion und vergibt hierfür ein bis drei Sterne. Ein Stern wird vergeben, wenn die Wasserqualität des Gewässers zum Baden ungeeignet ist. Bei zwei Sternen ist die Wasserqualität noch ausreichend, sodass Baden unbedenklich ist, und drei Sterne verweisen auf eine gute bis hervorragende Wasserqualität. **6P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Das nachfolgende Diagramm beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeiteinheit von einem Jahr.



Geben Sie die Übergangsmatrix an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2017

1.1.1 Extrempunkte mit $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$,
Wendepunkte mit $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$.
$f'(x) = 2x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $f'''(x) = 12x + 6$

Extrempunkte:

$2x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2 \cdot (2x+3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$; $x_3 = -\frac{3}{2}$

$f''(0) = 0$; $f''\left(-\frac{3}{2}\right) \overset{\text{WTR}}{=} 4{,}5$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}15625$

$TP\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{5}{32}\right)$

Wendepunkte:

$6x^2 + 6x = 0$

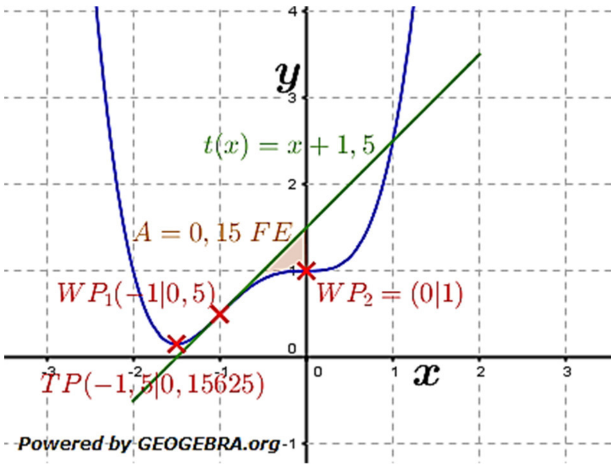
$6x(x+1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$

$f'''(0) \neq 0$; $f'''(-1) \overset{\text{WTR}}{\neq} 0$

$f(0) = 0$; $f(-1) = 0{,}5$

$WP_1(0|0)$; $WP_2(-1|0{,}5)$



1.1.2 Situation in rechter Grafik gekennzeichnet. Es ist eine Flächenberechnung zwischen zwei Kurven erforderlich im Intervall $[-1; 0]$.
Tangentengleichung:

$t(x) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$

$f'(-1) = -2 + 3 = 1$

$f(-1) = 0{,}5$

$t(x) = 1 \cdot (x+1) + 0{,}5 = x + 1{,}5$

$A = \int_{-1}^{0} (x + 1{,}5 - (0{,}5x^4 + x^3 + 1))\,dx$

$= \int_{-1}^{0} (-0{,}5x^4 - x^3 + x + 0{,}5)dx = \left[-0{,}1x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 0{,}5x\right]_{-1}^{0}$

$= \big(0 - (0{,}1 - 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}5)\big) = 0{,}15$

Die Fläche ist $0{,}15\ FE$ *groß.*

1.1.3 Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$:

$f(x) \cap g(x)$:

$0{,}5x^4 + x^3 + 1 = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2$

$x^2 + mx + 1 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}$ | p/q-Formel

Es handelt sich dann um einen Berührpunkt, wenn die Diskriminante Null ist.

$\frac{m^2}{4} - 1 = 0$; $\longrightarrow$ $m_1 = 2$; $m_2 = -2$

Wegen Bedingung $m > 0$ ist $m_1 = 2$ die Lösung.

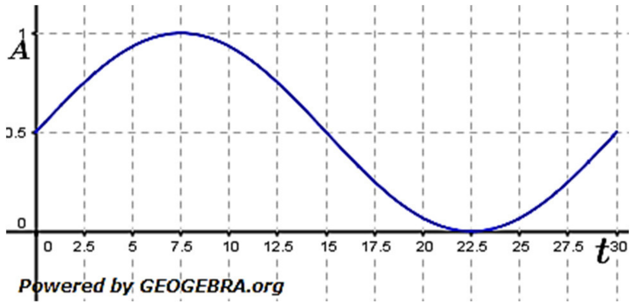
1.2 (1) Die Aussage ist falsch. h' besitzt bei $x_0 = 1$ eeine Nulstelle mit VZW von + nach −. Somit ist $T\left(1\middle|h(1)\right)$ ein Hochpunkt.

(2) Die Aussage ist falsch. Mit $m_t \cdot m_n = -1$ als Bedingung für Orthogonalität ergibt sich aus $m_t \cdot \frac{1}{6} = -1\ m_t = -6$. Das Schaubild von besitzt im abgebildeten Bereich an keiner Stelle den Funktionswert $h'(x_0) = -6$.

Lösung A2/2017

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.

Frage Sachzusammenhang:
Bestimmen Sie die Tage im Zyklus, an denen der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite $95\,\%$ beträgt.



2.2 Es ist nach dem Durchschnittsprozentsatz des Beleuchtungs-Anteils in den ersten 15 Tagen gefragt.

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} A(t)\,dt = \frac{1}{15} \cdot \left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi} cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\right]_0^{15}$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 - \frac{15}{2\pi} \cdot cos(\pi) - \left(-\frac{15}{2\pi} cos(0)\right)\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{2\pi} + \frac{15}{2\pi}\right)$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}8183$$

Der mittlere Beleuchtungsanteil in den ersten 15 Tagen beträgt etwa $81{,}8\,\%$.

2.3 Bei Vollmond ist der Beleuchtungsanteil $100\,\% = 1$. Somit muss der Sinusanteil der gegebenen Funktionsgleichung $B(t)$ den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen.

$$\frac{1}{2} \cdot sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{15}t + c = \frac{\pi}{2}$$

Wegen $t = 0$ ist $c = \frac{\pi}{2}$.

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

Lösung A3/2017

3.1 *Einführungs- und Wachstumsphase:*
Im Intervall von t mit $I =]0;5]$
Bei ca. $t = 5$ befindet sich der Wwendepunkt des Schaubildes, bei dem die momentane Änderungsrate maximal ist.
Reifephase:
Im Intervall von t mit $I =]5;15]$
Die momentane Änderungsrate nimmt in diesem Zeitintervall ab und nach ca. 15 Monaten beträgt die monatliche Verkaufszahl 9500 (und damit $95\,\%$ der maximalen monatlichen Verkaufszahl von 10.000).

Sättigungsphase:
Im Intervall von t mit $I =]15; 25]$
In diesem Intervall liegen die Verkaufszahlen über $95\,\%$ des Maximums.
Degenerationsphase:
Im Intervall von t mit $I =]25; 72]$
Nach ca. 25 Monaten nehmen die monatliche Verkaufszahlen kontinuierlich ab, 72 Monate nach Einführungsbeginn endet der Produktionszyklus.

3.2 Die Anzahl der verkauften Produkte in den sechs Jahren (72 Moaten) entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Schaubild und der t-Achse. Durch Abzählen der Kästchen erhält man ca. $34{,}5$ Kästchen.

Jedes Kästchen entspricht 10 (Monate) $\cdot\, 10000$ (Stück/Monat)$=100000$ Stück. Insgesamt wurden ca. $34{,}5 \cdot 10.000 = 345000$ Stück verkauft.

3.3 (1) Bestimmen Sie das Intervall, in dem $V(t) > 3000$ und $V'(t) > 0$.
(2) Berechnen Sie u für das gilt: $\int_u^{u+3} V(t)\,dt = 4000$.

Lösung A4/2017

4.1.1 *Zeitpunkt Anfangskonzentration:*

$c(0) = 0{,}05 \cdot e^0 = 0{,}05$

Davon $10\,\%$: $c(t_0) = 0{,}005$

$0{,}005 = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 t_0}$

$0{,}1 = e^{-0{,}017 t_0} \quad | \quad ln$

$-0{,}017 t_0 = \ln(0{,}1) \quad | \quad : -0{,}017$

$t_0 = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}017} \overset{\text{WTR}}{\approx} 135{,}45$

Nach $135{,}5$ Sekunden sind nur noch $10\,\%$ der Anfangskonzentration vorhanden.

Momentane Änderungsrate nach drei Minuten:

$v(t) = c'(t) = -0{,}017 \cdot 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t} = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017t}$

$v(180) = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017 \cdot 180} \overset{\text{WTR}}{\approx} 3{,}98545 \cdot 10^{-5}$

Die momentane Änderungsrate drei Minuten nachg Beobachtungsbeginn beträgt $3{,}98545 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{l \cdot s}$.

4.1.2 Abbildung B zeigt das Schaubild der Funktion c.
Wegen $c(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ hat das Schaubild von c die waagrechte Asymptote $y = 0$. Wegen der e-Funktion wird keine der Ableitungen von c irgendwelche Nullstellen besitzen, also hat das Schaubild weder Extrempunkte noch Wendestellen.
Diese Bedingungen treffen nur auf Schaubild B zu.
Schaubild A:
Das Schaubild besitzt eine Wendestelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.
Schaubild C:
Das Schaubild besitzt eine Nullstelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.

4.2 $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t} \implies V(t) = \frac{0{,}007}{0{,}07} e^{-0{,}07t} + C = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + C$

$V(0) = 0{,}125$
$0{,}125 = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07 \cdot 0} + C$
$0{,}125 = +0{,}1 + C$
$C = 0{,}025$
$V(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + 0{,}025$

Wegen $0{,}1e^{-0{,}07t} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ bleiben langfristig $0{,}025\frac{mol}{l}$ übrig.

$\frac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 = 20\,\%$

Langfristig bleiben etwa $20\,\%$ *der Anfangskonzentration übrig.*

Teil3 - Stochastik
Lösung A1/2017

1.1 Ereignisse A und B sind Bernoulli-Experimente mit $P(Tor) = 0{,}8$, $n = 4$, die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der geschossenen Tore.

$P(A) = B_{4;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}4096$

$P(B) = B_{4;0,8}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,8}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8192$

Ereignis C:

$\Omega = \{TorTorTor\overline{Tor}; \overline{Tor}TorTorTor\}$

$P(C) = 2 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}2048$

1.2 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p für die Ballabwehr durch den Torhüter für den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn von Tom. Sie kann die folgenden Werte annehmen:

$X = 1\,€$: Tom erzielt ein Tor;
$X = -2\,€$: Torgüter wehrt den Ball ab;
$X = -10\,€$: Tom trifft Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Es gilt:
$P(X = 1) = 0{,}8;\quad P(X = -2) = p;\quad P(X = -10) = 1 - 0{,}8 - p$
$E(X) = 1 \cdot 0{,}8 - 2 \cdot p - 10 \cdot (0{,}2 - p) = -1{,}2 + 8p$

Das Spiel soll fair sein, also $E(X) = 0$:
$-1{,}2 + 8p = 0$
$8p = 1{,}2 \implies p = 0{,}15$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehren muss, damit das Spiel fair ist, beträgt $15\,\%$.

1.3.1 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
B: Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt unter der Bedingung dass
A: der Torhüter den Ball abwehrt.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}13} = \frac{10}{13} \approx 0{,}769$

1.3.2 Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahgl erzielter Tore. X ist binomialverteilt mit $n = 70$ und $p = 0{,}87$.

$B_{70;0,87}(X \geq 68) = 1 - B_{70;0,87}(X \leq 67) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0038$

Lösung A2/2017

2.1 Die Felder sind wie folgt beschriftet:
Zahl 0: 8 Felder
Zahl 1: 4 Felder
Zahl 5: 4 Felder
Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$P(A) = P(5\overline{5}; \overline{5}5) = 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = 0{,}4$
$P(B) = P(11; 15; 51; 55) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{12+32+12}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$

2.2 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an, genau 25 Euro zu gewinnen. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ (5 Tage jeweils ein Los) und $p = \frac{1}{20}$ (Wahrscheinlichkeit für zwei 5en).
$B_{5;0{,}05}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0214$

2.3 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

x_i	$22{,}50$ €	$2{,}50$ €	$-1{,}50$ €	$-2{,}50$ €
Ergebnisse	(55)	(15;51)	(11)	alle anderen
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$	$2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$	$\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$	$\frac{23}{30}$

Erwartungswert: $E(X) = 22{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} + 2{,}50\,€ \cdot \frac{2}{15} - 1{,}50\,€ \cdot \frac{1}{20} - 2{,}50\,€ \cdot \frac{23}{30} = -0{,}53\,€$
Der Erwartungswert ist um $0{,}20$ € zu erhöhen (Einkauspreis eines Loses).
$E(X) + 0{,}20 = -0{,}33$.
Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von $0{,}33$ € pro Spiel rechnen.

2.4 Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Kiosk-Kunden, die ein Los kaufen. X ist binomialverteilt mit den unbekannten Parametern n und p.
Es ist jedoch bekannt:
(1) $\mu = n \cdot p = 17$
(2) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4$
(1) $n = \frac{17}{p}$
$n \longrightarrow$ (2)
(2) $\sqrt{\frac{17}{p} \cdot p \cdot (1-p)} = 4$
$17 \cdot (1-p) = 16$
$p = \frac{1}{17}$
$p \longrightarrow (1)$
(1) $n = \frac{17}{\frac{1}{17}} = 289$
Der Kiosk wird täglich von 289 *Kunden besucht.*

Die Sigmaregel $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ ergibt mit $\mu = 17$ und $\sigma = 4$:
$P(13 \le X \le 21) \approx 68{,}3\,\%$.

Diese Wahrscheinlichkeit gibt an, dass die Wahrscheinlichkeit ca. $68{,}3\,\%$ beträgt, dass an einem Tag zwischen 13 und 21 Kunden ein Los kaufen.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

1.1.1 *Schnittpunkt von E mit der x_3-Achse bedeutet, dass $x_1; x_2 = 0$ ist.*

$-3x_3 = 12 \Rightarrow \ x_3 = -4$

$S_{x_3}(0|0|-4)$

Ebene F echt parallel E bedeutet, dass die Normalenvektoren ein Vielfaches voneinander sind, das absolute Glied d unterschiedlich ist.

$F\colon\ 2x_1 - 3x_3 = d$ mit $d \neq 12$.

Ebene G die nue eine Gerade mit E gemeinsame hat:

E verläuft parallel zur x_2-Achse. Somit ist die einfachste Ebene, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat, die x_2x_3-Ebene.

$G\colon\ x_1 = 0$

1.1.2 Die Umwandlung der Normalenform in die Koordinatenform führt zu:

$E\colon\ 6x_1 + bx_3 = a \cdot b$

Durch Koeffizientenvergleich von x_1 erkennen wir, dass der Normalenvektor der Normalenform das Dreifache des Normalenvektors der Koordinatenform ist. Wegen -3 bei der Koordinatenform muss damit $b = -9$ sein. Dadurch muss $a \cdot b = 3 \cdot 12 = 36$ sein.

$a \cdot (-9) = 36 \Rightarrow \ a = -4.$

1.1.3 Abstand von P zu E (über die HNF):

$\frac{|2x_1 - 3x_3 - 12|}{\sqrt{4+9}} \stackrel{?}{=} \sqrt{13}$

$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{|-13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

Der Punkt P hat den Abstand $d = \sqrt{13}$ zur Ebene E.

1.2.1 (1) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Das Ergebnis bedeutet, dass $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

(2) Der Betrag des Kreuzproduktes zweier Vektoren ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelgramms. Mit $\frac{1}{2} \cdot$ wird diese Fläche halbiert und stellt somit die Fläche eines Dreiecks dar.

$\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 6$ ist die Fläche des dargestellten (rechtwinkligen) Dreiecks ABC.

1.2.2 Volumen des Körpers:

Durch die Rotation entsteht ein Kegel mit der Volumenformel $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.

In der Aufgabe ist $h = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$ und $r = \left|\overrightarrow{CA}\right|$.

Wegen $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|2 \cdot \overrightarrow{AC}\right| = 6$ ist $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6$.

$V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 2 = 24\pi \approx 75{,}4\, VE$

Der Kegel hat ein Volumen von etwa $75{,}4\, VE$.

Wert von c für Punkt $C(c|c|2)$ mit $c > 0$:
Jeder Punkt C muss die Bedingung erfüllen $|\overrightarrow{AC}| = 6$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} c-0 \\ c-0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$\sqrt{2c^2} = 6$

$c \cdot \sqrt{2} = 6$

$c = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{2}$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $C(3 \cdot \sqrt{2}|3 \cdot \sqrt{2}|2)$.

Lösung A1 Matrizen und Prozesse

1.1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

De Ergebnismatrix stimmt mit $\boldsymbol{C}$ überein, wenn $a = 2$ ist.

1.2.1.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \end{pmatrix}$

Die Behauptung des Mitarbeiters stimmt.

1.2.1.2 Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_1$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_1$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_2$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_2$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_3$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_3 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_3$ ist die Inverse von $\boldsymbol{C}$, da als Ergebnis die Einheitsmatrix entsteht.

Der Rohstoffvektor ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Produktionsvektor $\vec{p}$.

$$\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r} \implies \vec{p} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \vec{r} = \boldsymbol{D}_3 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Von E1 wurden 3 ME und von E2 wurden 7 ME produziert.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2017

1.2 Übergangsmatrix: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Bedingung für stationäre Verteilung:

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sowie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	$0{,}2$	$-0{,}3$	$+0{,}2$	0	(1) + (2)
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	
(4)	1	1	1	1	$5 \cdot$(1) + (4)

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	(2) + (3)
(4)	0	$1{,}25$	1	1	$5 \cdot$(2) + (4)

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	0	0	0	
(4)	0	0	2	1	

Daraus folgt: $x_3 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}4$; $x_1 = 0{,}1$

Langfristig sind $10\,\%$ *der Strände zum Baden ungeeignet.*