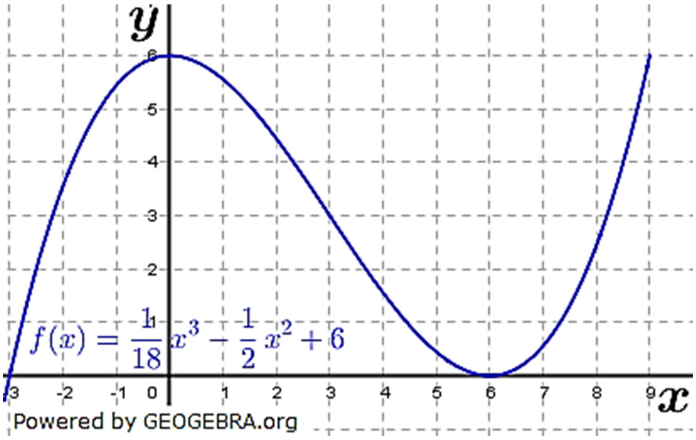
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2018

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{2}x^2+6;\ x\in\mathbb{R}$.
Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f.



1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a, b und c, sodass gilt:
$f(x)=a\cdot(x-b)\cdot(x-c)^2;\ x\in\mathbb{R}$. **3P**

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. **4P**

1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein, die von der y-Achse in zwei Flächen unterteilt wird. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A. **4P**

1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(0|6)$ an, die mit K
(1) genau einen Punkt
(2) genau drei Punkte
gemeinsam hat.
Die Gerade mit der Gleichung $y=m\cdot x+6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m. **6P**

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch:
$g(x)=\int_1^{x^2+1}\sin(2t)\,dt$ mit $x\in\mathbb{R}$.
Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:
$g'(x)=\sin(2x^2+2)-\sin(2)$.
Beurteilen Sie diese Behauptung. **3P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2/2018

Um Zugvögel beim Fliegen zu beobachten setzen Forscher spezielle, sehr leichte Drohnen ein. Die Drohne startet vom Boden aus und fliegt nach starker Beschleunigung hinter den Vögeln her. Die Geschwindigkeit der Drohne kann modellhaft durch die Funktion v mit

$$v(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t}$$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) seit dem Start der Drohne ($t = 0$).
$v(t)$ gibt die Geschwindigkeit in $\left(\frac{m}{s}\right)$ zum Zeitpunkt t an.

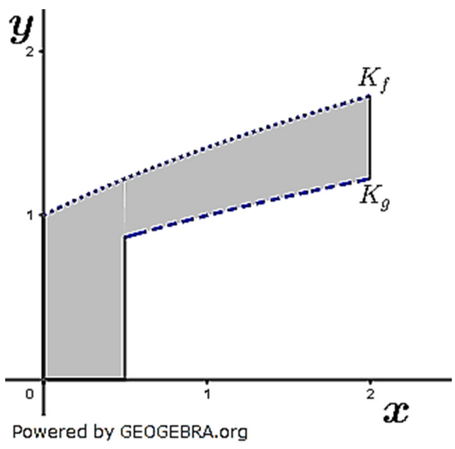
2.1 Zeichnen Sie das Schaubild von v für $0 \leq t \leq 100$.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, an die sich die Geschwindigkeit der Drohne nach diesem Modell annähert. **4P**

2.2 Berechnen Sie $\int_0^{50} v\,(t)dt$.
Interpretieren Sie das Integral im Sachzusammenhang. **3P**

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit entspricht der Beschleunigung dieser Drohne.
Begründen Sie, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als $0{,}5\,\frac{m}{s^2}$ ist. **3P**

Aufgabe A3/2018

3 Für eine Gartenschau sollen verschiedene Pflanzenkübel mit einer Höhe von jeweils 2 Meter aus Kunststoff gegossen werden. Die Abbildung unten zeigt beispielhaft den halben Querschnitt eines um $90\,°$ gekippten Pflanzenkübels mit seinem Pflanzeinsatz.
Der Kübel wird durch Rotation der grauen Fläche um die x-Achse beschrieben.
Die Mantelfläche des Kübels wird hierbei mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f erzeugt (in der Abbildung gepunktet).
Analog wird die Mantelfläche des Pflanzeinsatzes mit Hilfe des Schaubilds K_g der Funktion g erzeugt (in der Abbildung gestrichelt). Alle Angaben sind in Meter (m).



3.1 Zur Modellierung eines bestimmten Pflanzenkübels werden die Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{x+1}$; $0 \leq x \leq 2$ und $g(x) = \sqrt{0{,}5x + 0{,}5}$; $0{,}5 \leq x \leq 2$ verwendet.
Dieser Pflanzenkübel wird aus Kunststoff der Dichte $0{,}9$ Tonnen pro Kubikmeter gefertigt.
Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzkübels in Tonnen. **5P**

3.2 Für einen anderen Pflanzenkübel wird die Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$; $0 \leq x \leq 2$ verwendet.
Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von $2\,m$ der Radius des Pflanzenkübels $1{,}5\,m$ ist und der kleinste Radius in einer Höhe von $1\,m$ vorliegt. **5P**

Aufgabe A4/2018

4 Ein Wetterballon startet auf Meereshöhe und sendet mit ansteigender Höhe Daten des entsprechenden Luftdrucks. Bei seinem Flug wird der vom Ballon gemessene Luftdruck p in hPa (Hektopascal) in Abhängigkeit von der Höhe h (in km) näherungsweise durch die Funktion p mit $p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h}; 0 \leq h \leq 11$ modelliert.

4.1 Bestimmen Sie den Luftdruck auf Meereshöhe.
Ermitteln Sie die Höhe bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird. **3P**

4.2 Bestimmen Sie die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt. **2P**

4.3 Berechnen Sie den mittleren Wert des Luftdrucks, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist. **3P**

4.4 Interpretieren Sie die folgende Näherungsformel im Sachzusammenhang:
$p(h + 5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2}; 0 \leq h \leq 5{,}5.$ **2P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2018

1 Bei einem $10\,km$ Lauf werden die Läufer auf halber Strecke an einem Stand versorgt. Die Organisatoren bieten jedem Läufer jeweils genau einen Becher Wasser und ein Stück Obst als Versorgung an.
Aufgrund der Erfahrung aus früheren Wettbewerben nimmt man folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- $80\,\%$ der Läufer nehmen einen Becher Wasser;
- $30\,\%$ der Läufer nehmen ein Stück Obst;
- $5\,\%$ der Läufer nehmen nur ein Stück Obst und kein Wasser.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Läufern nehmen genau vier Läufer einen Becher Wasser.
B: Von sechs Läufern nehmen mindestens zwei Läufer ein Stück Obst.
C: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst. **7P**

1.2 Beurteilen Sie folgende Aussage:
„Wenn ein Läufer einen Becher Wasser zu sich nimmt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er dann auch ein Stück Obst zu sich nimmt, mehr als $30\,\%$.“ **3P**

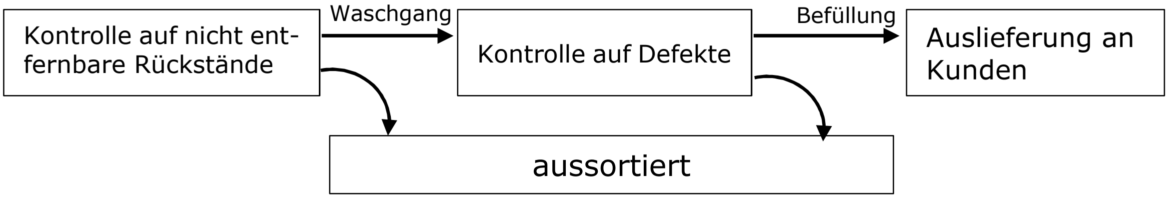
1.3 Insgesamt nehmen an dem Lauf 2500 Läufer teil.

1.3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2050 Läufer einen Becher Wasser nehmen. **2P**

1.3.2 Nach dem Lauf sollen die Wahrscheinlichkeiten überprüft werden, die aus der Erfahrung der früheren Wettbewerbe resultierten.
Tatsächlich haben genau 1950 Läufer einen Becher Wasser genommen.
Fassen Sie dieses Ergebnis als Stichprobe auf.
Prüfen Sie, ob die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von $80\,\%$ in dem zugehörigen Vertrauensintervall mit Vertrauenswahrscheinlichkeit $99\,\%$ liegt, das sich aus der Stichprobe ergibt. **3P**

Aufgabe A2/2018

2 Der Mineralwasserproduzent „Sauberwasser“ muss zurückgegebene PET Pfandflaschen von einer erneuten Befüllung auf nicht entfernbare Rückstände sowie auf Defekte (wie Risse) untersuchen und gegebenenfalls direkt nach der jeweiligen Kontrolle aussortieren. Der Prozessablauf, den jede einzelne Flasche durchläuft, ist im Folgenden dargestellt:



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* 2018

2.1 Beim Produzenten Sauberwasser weiß man:

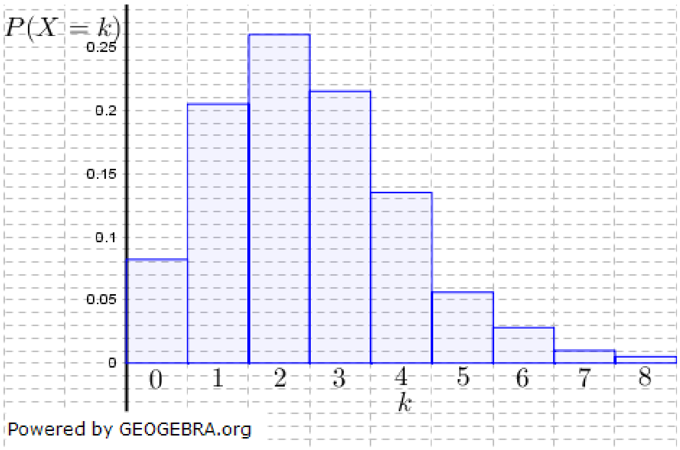
- $99\,\%$ aller Flaschen durchlaufen den Waschgang
- $96\,\%$ aller Flaschen werden befüllt, haben also weder nicht entfernbare Rückstände noch einen Defekt

2.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
$E1$: Von 5 Flaschen werden 5 befüllt.
$E2$: Von 15 Flaschen wird genau eine Flasche nicht befüllt.
$E3$: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
$E4$: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen. **7P**

2.1.2 Bestimmen Sie, wie viele Flaschen mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ mindestens eine Flasche vorzufinden, die nicht befüllt wird. **3P**

2.2 Trotz aller Qualitätskontrollen können nicht alle fehlerhaften Flaschen erkannt werden. Erfahrungsgemäß sind $0{,}5\,\%$ aller ausgelieferten Flaschen fehlerhaft.
Der Produzent Sauberwasser kontrolliert vor der Auslieferung an die Kunden bei einer Stichprobe 500 Flaschen auf Fehler.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl X der fehlerhaften Flaschen dieser Stichprobe.
Im Diagramm ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.
Bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Flaschen im σ-Intervall des Erwartungswerts liegt.

Nennen Sie einen Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel.



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1 Ein Flugzeug fliegt auf seiner Route über zwei verschiedene Länder hinweg. Ein Abschnitt der Flugroute kann modellhaft dargestellt werden durch g mit

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix};\ \ 0 \le t \le 20$$

wobei t die Zeit in Minuten ist.
Zu Beginn ($t = 0$) befindet sich das Flugzeug am Punkt $P(-20|-60|11)$.
Die x_3-Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.
Die Längeneinheit ist Kilometer (km). Die Luftraumgrenze der Länder wird durch die Ebene E mit $E\colon\ 3x_1 + 2x_2 = 0$ modelliert.

1.1 Bestimmen Sie den Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.
Begründen Sie, dass die Flughöhe in diesem Abschnitt ständig abnimmt.
4P

1.2 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Zu Beginn beträgt der minimale Abstand des Flugzeugs zur Lauftraumgrenze der Länder weniger als 50 Kilometer." **4P**

1.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt.
Bestimmen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug dann befindet. **3P**

1.4 Ein anderes Flugzeug ist gleichzeitig auf einer anderen Route unterwegs. Diese Route wird durch h mit

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -56 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -0{,}25 \end{pmatrix};\ \ 0 \le t \le 20$$

modelliert. Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge zueinander innerhalb des zwanzigminütigen Flugabschnitts. **4P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

1 In einer Simulation wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Heimspiele einer Fußballmannschaft regelmäßig von jeweils genau 50.000 Zuschauern besucht werden. Die Zuschauer reisen ausschließlich mit dem Auto (A), mit dem Bus bzw. der Bahn (B) oder zu Fuß bzw. dem Fahrrad (F) an.
Mit einem Auto können mehrere Zuschauer befördert werden. Die Zuschauer bilden also hinsichtlich der Anreise drei verschiedene Typen.

In der Simulation gilt das folgende Wechselverhalten der Zuschauertypen von einem Spieltag zum nächsten:

- Von A wechseln 25 % zu B.
- Von B wechseln 5 % zu F und 20 % zu A.
- Von F wechseln jeweils 10 % zu A und zu B.

Die restlichen Zuschauer wechseln nicht.

1.1 Stellen Sie dieses Wechselverhalten in einem Übergangsdiagramm dar. Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen. **5P**

1.2 Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern. **4P**

1.3 Nun geht man in der Simulation davon aus, dass am zweiten Heimspieltag 27.000 Zuschauer vom Typ B und 3.000 Zuschauer vom Typ F kommen. Pro Auto reisen zudem immer durchschnittlich 2,5 Zuschauer an.

1.3.1 Zeigen Sie, dass hierbei 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichen würden. **3P**

1.3.2 In der Simulation wird nun das Wechselverhalten der Autofahrer nach dem zweiten Heimspieltag so angepasst, dass die 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag genau ausreichen. Das Wechselverhalten der anderen Zuschauertypen B und F ändert sich dabei nicht.
Ermitteln Sie den veränderten Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die dann wieder mit dem Auto kommen. **3P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

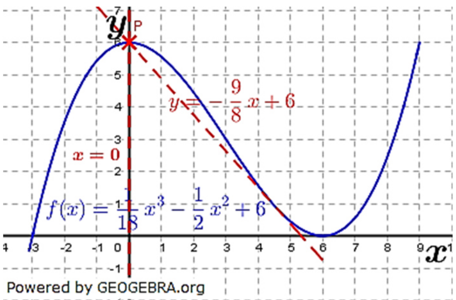
Lösung A1/2018

1.1.1 $a = \frac{1}{18}$, durch Funktionsgleichung bereits gegeben.
Das Schaubild von f hat bei $x_0 = -3$ eine einfache Nullstelle und bei $x_0 = 6$ eine doppelte Nullstelle.
Daraus folgt: $b = -3$ und $c = 6$

1.1.2 Wendepunkte mit $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$.
$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x$; $f''(x) = \frac{1}{3}x - 1$; $f'''(x) = \frac{1}{3}$
Wendepunkte:
$\frac{1}{3}x - 1 = 0$
$x = 3$
$f'''(x) \neq 0$
$f(3) = \frac{1}{18} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 = \frac{6}{2} = 3$
Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP(3|3)$.
Wendepunkt auf erster Winkelhalbierender:
Funktionsgleichung der ersten Winkelhalbierenden: $y = x$
$3 = 3$ | Punktprobe mit $WP(3|3)$
Der Wendepunkt liegt auf der ersten Winkelhalbierenden.

1.1.3 *Inhalt der Fläche $A_{groß}$:*
$$A_{groß} = \int_{-3}^{6} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{6} = 18 - \left(-\frac{99}{8}\right) = \frac{243}{8}$$
Inhalt der Fläche A_{klein}:
$$A_{klein} = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{0} = 0 - \left(-\frac{99}{8}\right) = \frac{99}{8}$$
$$\frac{A_{klein}}{A_{groß}} = \frac{\frac{99}{8}}{\frac{243}{8}} = \frac{99}{243} = 40{,}74\ \%$$

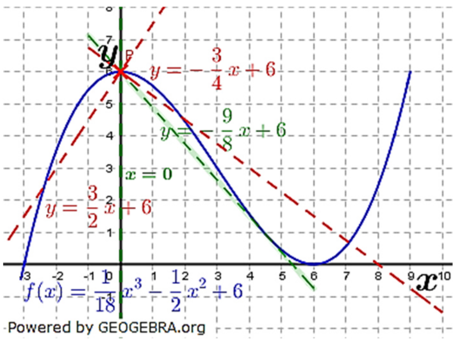
1.1.4 (1) genau einen Punkt
Mehrere Lösungen möglich, siehe nebenstehende Graphik.
Eine mögliche Lösung wäre z. B.
$y = -\frac{1}{6}x + 6$
(Die nebenstehend eingezeichnete Tangente $y = -\frac{9}{8}x + 6$ gehört nicht mehr zur Lösung).
Lösungsmenge:
Alle Geraden durch $(0|6)$ mit $m < -\frac{9}{8}$ haben genau einen Punkt gemeinsam.



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (*mit Hilfsmittel*) *2018*

(2) genau drei Punkte

Mehrere Lösungen möglich, siehe nebenstehende Graphik.
Eine mögliche Lösung wäre z. B.
$y=-\frac{3}{4}x+6$, alternativ z.B. $y=\frac{3}{2}x+6$



Die nebenstehend eingezeichnete Tangente $y=-\frac{9}{8}x+6$ stellt offensichtlich eine Grenze dar von $x=0$ bis kurz unter $y=-\frac{9}{8}x+6$ liegt nur ein Schnittpunkt vor.
Für alle $m>-\frac{9}{8}$ mit Ausnahme von $m=0$ liegen drei Schnittpunkte vor.
(Hinweis: Die Gerade $y=\frac{3}{2}x+6$ hat im Schaubild zwar nur zwei Schnittpnkte, es gibt jedoch noch einen weiteren, dritten Schnittpunkt für $x>10$, da die Funktion f schneller steigt als die Gerade $y=\frac{3}{2}x+6$. Dies gilt auch für alle Geraden mit der Steiung $>-\frac{9}{8}$ ohne $m=0$.)

m für Geraden mit nur zwei Schnittpunkten:
Aus dem Schaubild geht ohne Berechnung hervor, dass eine dieser Steigungen $m=0$ sein muss, somit Gerade mit der Funktionsgleichung $y=6$.
Die zweite Gerade mit nur zwei Schnittpunkten ist die Tangentengleichung an K durch den Punkt $(0|6)$.

$t(x)=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

$f'(x)=\frac{1}{6}x^2-x$

$t(x)=(\frac{1}{6}u^2-u)\cdot(x-u)+\frac{1}{18}u^3-\frac{1}{2}u^2+6$

$6=(\frac{1}{6}u^2-u)\cdot(0-u)+\frac{1}{18}u^3-\frac{1}{2}u^2+6$ | Punktprobe mit $(0|6)$

$-\frac{1}{6}u^3+u^2+\frac{1}{18}u^3-\frac{1}{2}u^2=0$

$-\frac{1}{9}u^3+\frac{1}{2}u^2=0$

$u^2\cdot\left(-\frac{1}{9}u+\frac{1}{2}\right)=0$

$u_1=0;\quad u_2=\frac{9}{2}$

$f'(u_1)=f'(0)=m_1=0$

$f'(u_2)=f'\left(\frac{9}{2}\right)=m_2=-\frac{9}{8}$

Die Geraden durch $(0|6)$ mit den Steigungen $m_1=0$ bzw. $m_2=-\frac{9}{8}$ haben zwei Schnittpunkte mit K.

1.2 $g(x)=\int_1^{x^2+1}\sin(2t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_1^{x^2+1}=-\frac{1}{2}\cos(2x^2+2)+\frac{1}{2}\cos(2)$

$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot\sin(2x^2+2)=2x\cdot\sin(2x^2+2)$

Gabis Behauptung ist falsch.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* 2018

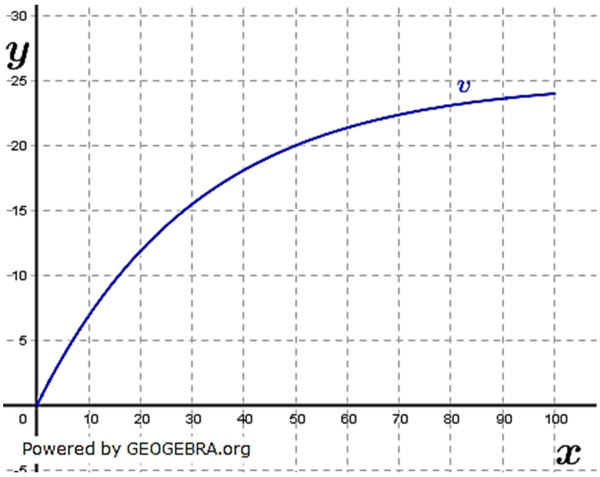
Lösung A2/2018

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.

Geschwindigkeitsannäherung:

Die gegebene Funktionsgleichung ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von 25.

Die Drohne nähert sich einer Geschwindigkeit von $25\frac{m}{s} = 90\frac{km}{h}$ an.



2.2 $\int_0^{50} v(t)dt = \int_0^{50}(25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t})\,dt.$

$= \left[25t + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322t}\right]_0^{50}$

$= 1405{,}2 - 776{,}4$

$= 628{,}8$

Interpretation des Sachzusammenhangs:

Das Integral über die Geschwindigkeit ergibt den zurückgelegten Weg.

Die Drohne legt in den ersten 50 *Sekunden einen Weg von* $628{,}8$ *Metern zurück.*

2.3 Größte Beschleunigung der Drohne:

$a(t) = v'(t) = -25 \cdot (-0{,}0322) \cdot e^{-0{,}0322t} = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$

Wegen $0 < e^{-0{,}0322t} \leq 1$ für $t \geq 0$ wird $0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$ immer kleiner für . Den größten Wert besitzt $e^{-0{,}0322t}$ zum Zeitpunkt $t = 0$, nämlich $e^{-0{,}0322 \cdot 0} = 1$.

Zeitpunkt mit $a < 0{,}5\frac{m}{s^2}$*:*

$0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t} < 0{,}5 \quad | \quad : 0{,}805$

$e^{-0{,}0322t} < 0{,}6211 \quad | \quad ln$

$-0{,}0322t < \ln(0{,}6211) \quad | \quad : -0{,}0322$

$t > 14{,}79$

Nach etwa $14{,}8$ *Sekunden hat die Drohne eine Beschleunigung von weniger als* $0{,}5\frac{m}{s^2}$.

Lösung A3/2018

3.1 Gewicht eines Kunststoffkübels:

$V_{Kübel} = \pi \cdot \int_0^{0{,}5} f(x)^2\,dx + \pi \cdot \int_{0{,}5}^{2}(f(x)^2 - g(x)^2)dx$

$= \pi \cdot \int_0^{0{,}5}(x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0{,}5}^{2}(x + 1 - (0{,}5x + 0{,}5)dx$

$= \pi \cdot \int_0^{0{,}5}(x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0{,}5}^{2}(0{,}5x + 0{,}5)dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{0{,}5} + \pi \cdot \left[\frac{1}{4}x^2 + 0{,}5x\right]_{0{,}5}^{2}$

$= \pi \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 0\right) + \pi \cdot \left(1 + 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\right)$

$= \pi \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{27}{16}\right)$

$= \frac{37}{16}\pi \approx 7{,}26$

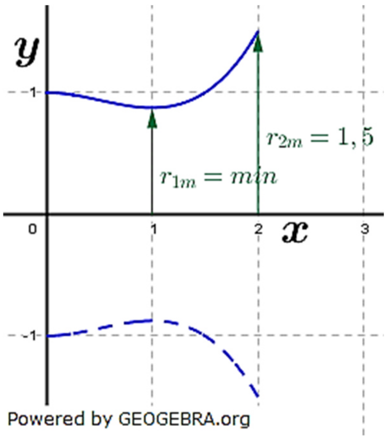
$7{,}26\,m^3 \cdot 0{,}9\frac{t}{m^3} = 6{,}534\,t$

Der Kübel hat ein Gewicht von etwa $6{,}5$ *Tonnen.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *2018*

3.2 *Anderer Pflanzkübel:*

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation. Die Außenkontur des Pflanzkübels soll durch die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ für $0 \leq x \leq 2$ modelliert werden.



Hierzu benötigen wir zwei Bedingungen zur Berechnung von a und b. Diese sind:

$f(2) = 1{,}5$ sowie $f'(1) = 0 \wedge f''(1) > 0$

(1) $8a + 4b + 1 = 1{,}5$

(2) $3a + 2b = 0$ | $\cdot 2$

(1) $8a + 4b + 1 = 1{,}5$

(2) $\underline{6a + 4b = 0}$

(1)-(2) $2a + 1 = 1{,}5$

$2a = 0{,}5$

$a = \frac{1}{4}$

$a \rightarrow (2)$

$3 \cdot \frac{1}{4} + 2b = 0$

$2b = -\frac{3}{4}$

$b = -\frac{3}{8}$

Die Funktionsgleichung könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ für $0 \leq x \leq 2$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

$f''(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} > 0$

Bei $x_0 = 1$ liegt ein lokales Minimum vor mit $f(1) = \frac{7}{8}$.

Wir müssen noch prüfen, ob dieses Minimum für $0 \leq x \leq 2$ ein globales Minimum ist:

$f(0) = 1; \quad f(2) = 1{,}5$

Der Punkt $P\left(1\middle|\frac{7}{8}\right)$ ist für $0 \leq x \leq 2$ ein globales Minimum.

Die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ *die gestellten Bedingungen.*

Lösung A4/2018

4.1 *Luftdruck auf Meereshöhe:*

$p(0) = p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot 0} = 1013$

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt $1013\ hPa$*.*

Höhe für $787\ hPa$*:*

$787 = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h}$ | $:1013$

$e^{-0{,}126 \cdot h} = 0{,}7769$ | ln

$-0{,}126 \cdot h = ln\,(0{,}7769)$ | $:-0{,}126$

$h = 2$

In einer Höhe von etwa $2\ km$ *beträgt der Luftdruck* $787\ hPa$*.*

4.2 *Prozentualer Anteil der Abnahme:*
$e^{-0{,}126} = 0{,}8816 \approx 88{,}2\ \%$
$100\ \% - 88{,}2\ \% = 11{,}8\ \%$
Die prozentuale Abnahme für $1\ km$ *Höhenzunahme beträgt ca.* $11{,}8\ \%$.

4.3 *Mittlerer Luftdruck bei* $11\ km$ *Höhenunterschied:*
$\overline{p} = \frac{1}{11} \cdot \int_0^{11} p(h)\,dh = \frac{1}{11} \cdot \left[-\frac{1013}{0{,}126} \cdot e^{-0{,}126h}\right]_0^{11} = \frac{1}{11} \cdot (-2010 + 8039{,}7) = 548{,}11$
Der mittlere Luftdruck bei $11\ km$ *Höhenunterscheid beträgt ca.* $548\ hPa$.

4.4 $p(h + 5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2}; 0 \leq h \leq 5{,}5$
Unabhängig auf welcher Höhe sich der Ballon befindet, gilt:
Der Luftdruck $5{,}5\ km$ *über der aktuellen Höhe ist etwa halb so groß wie in der aktuellen Höhe.*

Teil3 - Stochastik
Lösung A1/2018

1.1 Ereignisse A und B sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(A) = B_{5;0,8}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}4096$

$P(B) = B_{6;0,3}(X \geq 2) = 1 - B_{6;0,3}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}5798$

C: Ein Läufer nimmt nur ein Becher Wasser und kein Obst.
Lösung über Vierfeldertafel:

	Obst (O)	Kein Obst ($\overline{O}$)	
Wasser (W)	0,25	0,55	**0,8**
Kein Wasser ($\overline{W}$)	**0,05**	0,15	0,2
	0,3	0,7	**1**

$P(C) = P(W \cap \overline{O}) = 0{,}55$

1.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Läufer Obst nimmt unter der Bedingung, dass er schon einen Becher Wasser genommen hat.
$P_W(O) = \frac{P(W \cap O)}{P(W)} = \frac{0{,}25}{0{,}8} = 0{,}3125 > 0{,}30$
Die Aussage ist korrekt, denn $31{,}25\ \%$ ist größer als $30\ \%$.

1.3.1 $B_{2500;0,8}(X > 2500) = 1 - B_{2500;0,8}(X \leq 2050) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0053$

1.3.2 Relative Trefferhäufigkeit: $h = \frac{1950}{2500} = 0{,}78$

Berechnung des Vertrauensintervalls mit $c = 2{,}58$ (aufgrund der Vertrauenswahrscheinlichkeit von $99\ \%$) und $n = 2500$.

$$I = \left[0{,}78 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}78 \cdot (1 - 0{,}78)}{2500}}; 0{,}78 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}78 \cdot (1 - 0{,}78)}{2500}}\right]$$

$$I = [0{,}7586; 0{,}8014] = [75{,}86\ \%; 80{,}14\ \%]$$

Die ursprünglich angenommene Wahrscheinlichkeit von $80\ \%$ *ist in dem Vertrauensintervall enthalten.*

Lösung A2/2018

2.1.1 Ereignisse $E1$ und $E2$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{5;0,96}(x = 5) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}815$

$P(E2) = B_{15;0,04}(x = 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}339$

$E3$: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird befüllt unter der Bedingung, dass sie gewaschen wurde.

$P(E3) = P_{gew}(bef) = \frac{P(gew \cap bef)}{P_{gew}} = \frac{0{,}96}{0{,}99} \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}97$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $0{,}97$ *bzw.* $97\,\%$.
$E4$: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.
Bedingte Wahrschenilichkeit: Eine Flasche wird nicht befüllt unter der Bedingung, dass sie nicht gewaschen wurde.

$P(E4) = P_{\overline{bef}}(\overline{gew}) = \frac{P(\overline{bef} \cap \overline{gew})}{P_{\overline{bef}}} = \frac{0{,}01}{0{,}04} \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}25$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $0{,}25$ *bzw.* $25\,\%$.

2.1.2 $B_{n;0,04}(x \geq 1) > 0{,}9$

$1 - B_{n;0,04}(X = 0) > 0{,}9 \quad | \quad +B_{n;0,04}(X = 0);\ -0{,}9$

$1 - 0{,}9 > B_{n;0,04}(X = 0)$

$0{,}1 > \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}96^n$

$ln\,(0{,}1) > n \cdot ln\,(0{,}96) \quad | \quad : ln\,(0{,}96)$

$n > \frac{ln\,(0{,}1)}{ln\,(0{,}96)}$

$n > 56{,}4$

Es müssen mindestens 57 *Flaschen kontrolliert werden.*

2.2 Erwartungswert:
$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}005 = 2{,}5$
Standardabweichung:
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{2{,}5 \cdot 0{,}995} = 1{,}5772$

$1 \cdot \sigma$-Intervall (zum Erwartungswert):
$[2{,}5 - 1{,}5772; 2{,}5 + 1{,}5772] \rightarrow [0{,}9228; 4{,}0772]$
Wahrscheinlichkeit für X mit Rechner:

$P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}8101$

Wahrscheinlichkeit für X über Diagramm:
$P(X \leq 4) - P(X = 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}815$

Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel:
Die 1-Sigma-Regel besagt einen Wert von ca. $68\,\%$, für diesen Vorgang ein sehr ungenaues Ergebnis der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit.
Ein Grund für diese Ungenauigkeit ist, dass die Bedingung $\sigma > 3$ *hier nicht erfüllt ist.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2018

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

1.1 *Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn:*

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug befindet sich fünf Minuten nach Beginn im Punkt $P(-10|-30|8{,}5)$.

Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde:

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}\right| \cdot 3{,}6 = \sqrt{4+36+0{,}25} \cdot 60 = 380{,}66$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt ca. 380 km/h.

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3-Koordinate des Richtungsvektors kleiner Null ist.

1.2 *Abstand des Flugzeugs zur Lauftraumgrenze der Länder zu Beginn:*

Berechnung über den Aufpunkt der Fluggeraden und der HNF der Ebene der Luftraumgrenze:

HNF von E: $\frac{3x_1+2x_2}{\sqrt{9+4}} = 0$

Abstand von P zu E: $d(P;E) = \frac{|3\cdot(-20)+2\cdot(-60)|}{\sqrt{13}} = \frac{180}{\sqrt{13}} = 49{,}923$

Das Flugzeug ist damit zu Beginn weniger als $50\ km$ von der Luftraumgrenze der Länder entfernt.

1.3 *Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt:*

$g \cap E$:

Aus g folgt: $x_1 = -20 + 2t$

$x_2 = -60 + 6t$

$x_1;\ x_2 \to E$:

$3 \cdot (-20+2t) + 2 \cdot (-60+6t) = 0$

$6t - 60 + 12t - 120 = 0$

$18t = 180$

$t = 10$

Zehn Minuten nach Beobachtungsbeginn durchstößt das Flugzeug die Luftraumgrenze.

Höhe es Flugzeugs zu diesem Zeitpunkt:

$x_3 = 11 + 10 \cdot (-0{,}5) = 6$

Das Flugzeug befindet sich in $6\ km$ Höhe.

1.4 *Kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge:*

Entfernung zweier Punkte mit dem Satz des Pythagoras im Raum:

$F1(-20+2t|-60+6t|11-0{,}5t)$

$F2(20-2t|-56+6t|8{,}5-0{,}25t)$

$d(F1;F2) =$

$$\sqrt{\left(20-2t-(-20+2t)\right)^2 + \left(-56+6t-(-60+6t)\right)^2 + \left(8{,}5-0{,}25t-(11-0{,}5t)\right)^2}$$

$d(F1;F2) = \sqrt{(40-4t)^2 + 4^2 + (-2{,}5+0{,}25t)^2}$

Der Abstand ist am kleinsten, wenn der Wert unter der Wurzel am kleinsten ist, die Funktion unter der Wurzel also einen Tiefpunkt hat.

$f(t) = (40-4t)^2 + (-2{,}5+0{,}25t)^2 + 16$

$f'(t) = 2(40-4t)\cdot(-4) + 2(-2{,}5+0{,}25t)\cdot 0{,}25$

$f'(t) = -320 + 32t - 1{,}25 + 0{,}125t = 32{,}125t - 321{,}25$

$32{,}125t - 321{,}25 = 0$

$32{,}125t = 321{,}25$

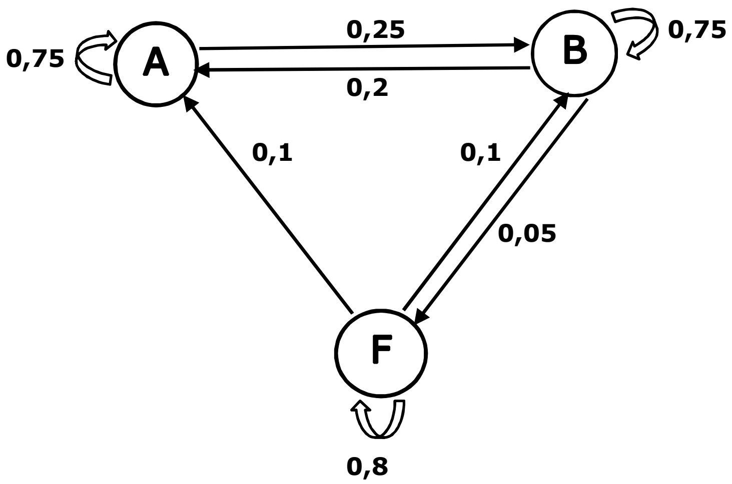
$t = 10$

$d(t) = \sqrt{(40-40)^2 + 16 + (-2{,}5+2{,}5)^2} = \sqrt{16} = 4$

Nach 10 *Minuten ist der Abstand der beiden Flugzeuge mit* $4\,km$ *am kleinsten.*

Lösung A1 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsdiagramm*



Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

Übergangsmatrix: $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Anfangsverteilung: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M}\cdot\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

Nach dem Modell kommen beim zweiten Heimspieltag jeweils 5000 Zuschauer mit dem Auto bzw. Bus und Bahn und 40.000 wiederum zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (*mit Hilfsmittel*) *2018*

1.2 *Prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern:*

Berechnung des Stabilitätsvektors:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

Dies führt zu nachfolgendem LGS:

(1) $0{,}75x + 0{,}2y + 0{,}1 \cdot (1-x-y) = x$
(2) $0{,}25x + 0{,}75y + 0{,}1 \cdot (1-x-y) = y$
(3) $0 \cdot x + 0{,}05y + 0{,}8 \cdot (1-x-y) = 1-x-y$

(1) $-0{,}35x + 0{,}1y = -0{,}1$ | $\cdot 20$
(2) $0{,}15x - 0{,}35y = -0{,}1$ | $\cdot 20$
(3) $0{,}2x + 0{,}25y = 0{,}2$ | $\cdot 20$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $3x - 7y = -2$ | $3 \cdot (1) + 7 \cdot (2)$
(3) $4x + 5y = 4$ | $4 \cdot (1) + 7 \cdot (3)$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $0 \quad - 43y = -20$
(3) $0x \quad + 43y = 20$

Aus (2) bzw. (3) folgt:

$y = \frac{20}{43} \approx 0{,}465$

(1) $-7x + 2 \cdot \frac{20}{43} = -2$

$7x = \frac{126}{43}$

$x = \frac{18}{43} \approx 0{,}419$

Daraus dritter Eintrag des Stabilitätsvektors:

$1 - x - y = 1 - \frac{18}{43} - \frac{20}{43} = \frac{5}{43} \approx 0{,}116$

Mit dem Auto kommen etwa $41{,}9\,\%$, *mit dem Bus bzw. der Bahn etwa* $46{,}5\,\%$ *und zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad etwa* $11{,}6\,\%$ *der Zuschauer.*

1.3.1 8.000 *Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichend:*

Am zweiten Heimspieltag sind es

27.000 Zuschauer vom Typ B
3.000 Zuschauer vom Typ F
$50.000 - 27.000 - 3.000 = 20.000$ Zuschauer vom Typ A.

Verteilungsvektor am zweiten Heimspieltag: $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20700 \\ 25550 \\ 3750 \end{pmatrix}$$

Am dritten Heimspieltag ist mit 20700 Zuschauern zu rechnen, die mit dem Auto kommen.

Dies entspricht $\frac{20700}{2,5} = 8280$ Parkplätzen.

Die Anzahl der benötigten Parkplätze ist 8280 und damit größer als 8000.

1.3.2 *Veränderter Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die wieder mit dem Auto kommen:*

8000 Parkplätze reichen aus, wenn $2,5 \cdot 8.000 = 20.000$ Zuschauer mit dem Auto kommen.

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} a & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Somit muss gelten:

$20000 \cdot a + 27000 \cdot 0,2 + 3000 \cdot 0,1 = 20000$

$20000 \cdot a = 14300$

$a = \frac{14300}{20000} = 0,715$

71,5% der Zuschauer, die am zweiten Heimspieltag mit dem Auto gekommen waren, kommen dann am dritten Heimspieltag wieder mit dem Auto.