Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2019

1.1.1 *Bestimmung der Werete von a und b:*

(1) $1 = a \cdot (-1)^3 + b(-1)^2$ | Punktprobe mit $P(-1|1)$

(2) $0 = a \cdot (1)^3 + b(1)^2$ | Punktprobe mit $Q(1|0)$

(1) $1 = -a + b$

(2) $\underline{0 = a + b}$

(1)+(2) $1 = 2b \;==>\; b = \frac{1}{2}$

$b \to (1)$ $1 = -a + \frac{1}{2} \;==>\; a = -\frac{1}{2}$

Die Funktionsgleichung lautet $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

1.1.2 $b = -a \;==>\; b = \frac{1}{2}$

Nullstellen von $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$:

$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 0$ | $\cdot(-2)$

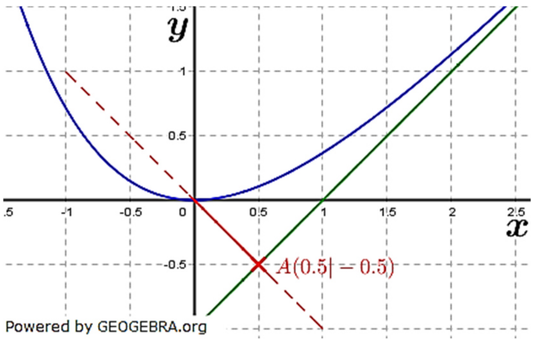
$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0;\quad x_3 = 1$

p *hat keine negative Nullstellen.*

1.2.1 *Punkt auf g des kleinsten Abstands zu $T(0|f(0))$, Größe dieses Abstgands.*



Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Der kürzeste Abstand ist immer der senkrechte Abstand. Hier ist dieser auf der Normalen zu g durch den Punkt $T(0|f(0))$.

$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

$T(0|0)$

Orthogonalitätsbedingung von Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Mit $m_1 = 1$ von g gilt $m_2 = -1$ für die Normale.

$n:\; y = -1(x-0) - 0$ | Punkt-Steigungsformel durch $T(0|0)$

$n:\; y = -x$

$g \cap n$:

$x - 1 = -x$

$2x = 1; \;==>\; x = \frac{1}{2}$

$x \to n:\; y = -\frac{1}{2}$

Der Punkt auf g mit dem kleinsten Abstand zu $T(0|0)$ hat die Koorindaten $A(0{,}5|-0{,}5)$.

$\overline{AT} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

Der Abstand beträgt $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\, LE$.

1.2.2 *Funktionsterm h für Verschiebung von K:*
Das Schaubild K wird um eine Stelle nach rechts und um eine Stelle nach unten verschoben.
$h(x) = (x-1) - 1 + e^{-(x-1)} - 1$
$h(x) = x - 3 + e^{1-x}$

1.2.3 (1) K besitzt keinen Wendepunkt.
Die zweite Ableitung von $f(x)$ ist $f''(x) = e^{-x}$. Diese Funktion hat keine Nullstellen.

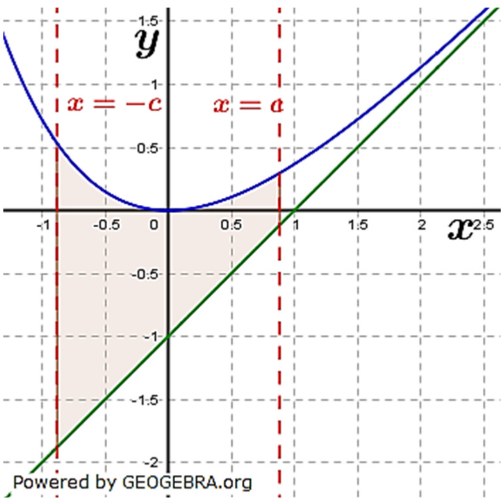
(2) Im Intervall $[1{,}841; 1{,}842]$ liegt ein x_0, sodass $f(x_0) = 1$ gilt.
$1 = x_0 - 1 + e^{-x_0}$
$2 = x_0 + e^{-x_0}$
Tabellenwerte mittels WTR:

Tabellenwerte mittel WTR

x_0	$x_0 + e^{-x_0}$
1,840	1,9988
1,841	1,9997
1,842	2,0005
1,843	2,0013

(3) Es gibt keine Normale an K, die g senkrecht schneidet.
$m_g = 1$
Sofern es eine Normale an K gäbe, die g senkrecht schneidet, müsste K über eine Parallele mit der Steigung $f'(x) = 1$ haben.
$f'(x) = 1 - e^{-x}$
$1 = 1 - e^{-x}$
$e^{-x} = 0 \implies \mathbb{L} = \{\}$

1.2.4 *Berechnung von c für Flächeninhalt $2\,FE$:*
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Die gesuchte Fläche ist das Integral im Intervall $I = [-c; c]$ zwischen oberer Kurve f und unterer Kurve g.



$2 = \int_{-c}^{c} \left(x - 1 + e^{-x} - (x-1)\right) dx$
$\quad = \int_{-c}^{c} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{-c}^{c}$
$\quad = -e^{-c} - (-e^{c})$
$2 = e^{c} - e^{-c} \quad | \cdot e^{c}$
$2e^{c} = e^{2c} - 1$
$e^{2c} - 2e^{c} - 1 = 0$
$e^{c_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{1+1} \quad |$ pq-Formel
$e^{c_1} = 1 + \sqrt{2}$
$e^{c_1} = 1 - \sqrt{2}$
$c_1 = ln\,(1 + \sqrt{2})$
c_2: $\mathbb{L} = \{\}$
Für $c = ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ beträgt die Fläche $2\,FE$.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2019

Lösung A2/2019

2.1 *Entwicklung der NO_2-Konzentration im Tagesverlauf und Interpretation:*
Morgens zwischen *6:00* und *8:00* Uhr sowie nachmittags und in den frühen Abendstunden zwischen *15:00* und *18:00* Uhr steigt die NO_2-Konzentration sehr stark an und erreicht jeweils ihre maximalen Werte. Dies liegt höchstwahrscheinlich am Berufsverkehr der in diesen Zeiten stark zunimmt. Danach nahmen die Werte jeweils wieder ab, da dann der Berufsverkehr deutlich reduziert ist.

2.2.1 Beurteilung von *„Das Maximum von f weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2-Konzentration um mehr als $10\,\%$ ab":*
Das globale Maximum des vorgegebenen Schaubildes liegt bei etwa $49\ \frac{\mu g}{m^3}$ um $18{:}00$ Uhr.
Das Maximum von f liegt bei $45\ \frac{\mu g}{m^3}$ etwa um $18{:}30$.
Abweichung in %:
$p\% = \frac{45}{49} \cdot 100 = 91{,}84\,\%$
$100\,\% - 91{,}84\,\% = 8{,}16\,\%$
Das Maximum von f weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2-Konzentration um lediglich $8{,}2\,\%$ ab also weniger als $10\,\%$.

2.2.2 *Zeitpunkte der größten Zunahme der NO_2-Konzentration am größten ist bei Modell f:*
Die größten Zunahmen sind in den Wendepunkten mit positiver Steigung. Bei einer unverschobenen Sinuskurve sind dies die Zeitpunkte $t_1 = 0$ und $t_2 = t_1 + p$.
Periode von f:
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$
Die gegebene Funktion f ist in t-Richtung um $5{,}5$ $\left(\frac{11}{2}\right)$ Stunden nach rechts verschoben. Somit sind die Zeitpunkte der größten Zunahme:
$t_1 = 5{,}5 \ \hat{=}\ 5{:}30$ Uhr
$t_2 = t_1 + 10 = 15{,}5 \ \hat{=}\ 15{:}30$ Uhr.

2.2.3 *Zeitpunkte für Bedingung $f(t) = 40$:*
$40 = 15 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30 \qquad | \qquad +30;\ \ 15$
$\frac{2}{3} = sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)$
Substitution: $u = \frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)$
$\frac{2}{3} = sin\,(u)$
$u_1 = arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}73$
Resubstitution:
$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t_1 - \frac{11}{2}\right) = 0{,}73 \qquad | \qquad \cdot\frac{5}{\pi};\ +\frac{11}{2}$
$t_1 = 6{,}67$
$t_1 = 6{,}67 \ \hat{=}\ 6{:}40$ Uhr
Die Konzentration von $40\ \frac{\mu g}{m^3}$ wurde erstmals um $6{:}40$ erreicht.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *2019*

Lösung A3/2019

3.1 *Höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals.*

Gesucht ist die y-Koordinate eines Hochpunktes sowie der Abstand der beiden Hochpunkte.

Hochpunkte über $f'(x) = 0 \land f''(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x; \quad f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} = 0$

$x^2 = 6 \implies x_2 = \sqrt{6};\ x_3 = -\sqrt{6}$

$x_1 = 0$ ist lokales Minimum, siehe Grafik.

$x_{2,3}$ sind die beiden lokalen Maxima, siehe Grafik.

$f(\sqrt{6}) = -\frac{1}{16} \cdot \sqrt{6}^4 + \frac{3}{4}\sqrt{6}^2 = 2{,}25$

$2 \cdot \sqrt{6} \approx 4{,}9$

Der höchstmöglichen Wasserstand liegt bei $2{,}25\ m$, die Breite des Kanals beträgt etwa $4{,}9\ m$.

3.2.1 *Breite von $4\ m$ bei Wasserstand $2\ m$:*

Gesucht ist der Abstand der beiden inneren Schnittpunkte zwischen f und der Geraden mit $y = 2$.

$f \cap 2$:

$-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2 = 2$

$\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 2 = 0$ | $\cdot 16$

$x^4 - 12x^2 + 32 = 0$

$x_{1,2}^2 = +6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2$ | p/q-Formel

$x_1^2 = 8;\ x_1 = \sqrt{8};\ x_2 = -\sqrt{8}$

$x_2^2 = 4;\ x_3 = \sqrt{4} = 2;\ x_4 = -\sqrt{4} = -2$

Gesucht ist der Abstand der inneren Schnittpunkte, also der Abstand von x_3 und 4.

$2 \cdot 2 = 4$

Bei $2\ m$ Wasserstand beträgt die Kanalbreite $4\ m$, ***q.e.d.***.

3.2.2 *Wert von $15 \cdot \int_{-2}^{2}(2 - f(x))\,dx$.*

$$15 \cdot \int_{-2}^{2}(2 - f(x))\,dx = 15 \cdot \int_{-2}^{2}\left(2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2\right)dx = 15 \cdot \left[2x + \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 15 \cdot \left(4 + \frac{32}{80} - 2 - \left(-4 - \frac{32}{80} + 2\right)\right)$$

$$= 15 \cdot 4{,}8 = 72$$

$15 \cdot \int_{-2}^{2}(2 - f(x))\,dx = 72$

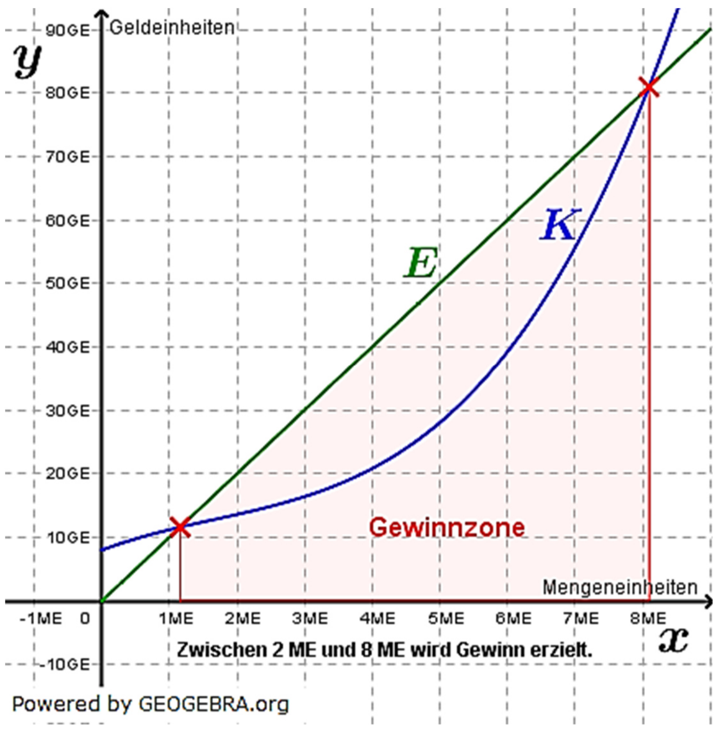
Interpretation:

Der Wert 72 des Integrals entspricht dem Volumen des Kanals in m^3 bei einem Wasserstand von $2\ m$ Höhe auf einer Kanallänge von $15\ m$.

3.3 *Steigung a der Geraden $y = a \cdot x$:*
Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Tangente an f im Punkt $B(u|f(u))$ als Ursprungsgerade.
Tangentengleichung:
$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$
$f'(u) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u;\quad f(u) = -\frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$
$t(x) = \left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (x-u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$
Durch Tangente verläuft durch $T(0|0)$
$\left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (0-u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0$ | Punktprobe mit $T(0|0)$
$\frac{1}{4}u^4 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0$
$\frac{3}{16}u^4 - \frac{3}{4}u^2 = 0$ | $\cdot \frac{16}{3}$
$u^4 - 4u^2 = 0$
$u^2(u^2 - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$u_{1,2} = 0$
$u_{3,4} = \pm 2$
$u_{1,2} = 0$ ist Berührstelle der Geraden im Ursprung.
$u_3 = 2$ ist gesuchte Berührstelle an der rechten Böschung.
$u_3 = -2$ ist Berührstelle an der linken Böschung.
$f'(2) = -\frac{1}{4}2^3 + \frac{3}{2}2 = -2 + 3 = 1$
Die Tangente hat die Gleichung $y = x$, da die Steigung $a = 1$.

Lösung A4/2019

4.1 *Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion.*



4.2 *Berechnung des maximalen Gewinns:*

$G(x) = E(x) - G(x)$

$E(x) = 10x$

$G(x) = 10x - (0{,}2x^3 - x^2 + 4x + 8) = -0{,}2x^3 + x^2 + 6x - 8$

Maximum über $G'(x) = 0$:

$G'(x) = -0{,}6x^2 + 2x + 6$

$-0{,}6x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad | \quad \cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

$x^2 - \frac{10}{3}x - 10 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{90}{9}} = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{115}$

$x_1 = 5{,}24;\quad x_2 = -1{,}9$

$G''(x) = -1{,}2x + 2$

$G''(5{,}24) = -1{,}2 \cdot 5{,}24 + 2 < 0$

$x_1 = 5{,}24$ ist Maximum

$G(5{,}24) = -0{,}2 \cdot 5{,}24^3 + 5{,}24^2 + 6 \cdot 5{,}24 - 8 = 22{,}12$

Der maximale Gewinn beträgt $22{,}12\ GE$.

4.3 *Interpretation von Bedingungen:*

Die Bedingungen

(1) $K''(x_1) = 0 \wedge K'''(x_1) \neq 0$,

(2) $K'(x_1) = \frac{7}{3}$.

bedeuten, dass sich bei $x_1 = \frac{5}{3}\ ME$ ein Wendepunkt von K mit dem geringsten Kostenanstieg (momentane Änderungsrate) $\frac{7}{3}\ GE/ME$ befindet.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1/2019

1.1 Ereignisse $E1$ bis $E3$ sind Bernoulli-Experimente mit:

$P(E1) = B_{20;0{,}035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}49$

$P(E2) = B_{50;0{,}035}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}47$

$P(E3) = B_{100;0{,}035}(X \geq 4) = 1 - B_{100;0{,}035}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}465$

1.2 Mindestens eine Zecke von 25 muss den FSME-Virus tragen, sonst wird man ja damit nicht angesteckt.

$B_{25;0{,}035}(X \geq 1) = 1 - B_{25;0{,}035}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}59$

Die Aussage ist nicht wahr, da bei genau 25 Zeckenbissen 60% noch nicht erreicht sind.

1.3.1 Stichprobenumfang $n = 2000$; relative Häufigkeit $h = \frac{58}{2000} = 0{,}029$; Sicherheitsniveau $c = 1{,}96$.

Vertrausensintervall: $\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$ (siehe Merkhilfe)

$$\left[0{,}029 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}; 0{,}029 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}029\cdot 0{,}971}{2000}}\right] = [0{,}0216; 0{,}0364]$$

Interpretation:
Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ *liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke in Region* A *FSME-Viren in sich trägt im Intervall* $[0{,}0216; 0{,}0364]$.

1.3.2 *Erläutern der Bedeutung des Ergebnisses 1.3.1 für den Umfang der Stichprobe in Region* B*:*

Die Länge L eines Vertrauensintervalls beträgt $2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$.
Ist in Region B (nach Aufgabenstellung) h größe, so wird auch der Ausdruck $h \cdot (1-h)$ unter der Wurzel größer. Damit wird der gesamte Ausdruck größer.
Begründung:
Die Funktion $g(h) = h \cdot (1-h) = h - h^2$ hat das Schaubild einer nach unten geöffneten Parabel mit der Scheitelachse $h = 0{,}5$.
Für $0 < h < 0{,}5$ ist die Funktion $g(h)$ streng monoton wachsend.
Da die Länge L gleich bleiben soll, muss der Nenner des Bruches unter der Wurzel wachsen, wenn der Zähler größer wird.
Fazit:
In der Region B *wurden daher mehr als* 2000 *Zecken untersucht.*

Lösung A2/2019

2.1 Sei W=Wolke, S=Sonne und M=Mond.
A: „Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad."
Dieses Ereignis tritt auf, wenn das Glücksrad beim dritten Drehen „W" zeigt oder dreimal „$\overline{W}$" erscheint.
$P(A) = P\left(\overline{W}\,\overline{W}W\right) + P\left(\overline{W}\,\overline{W}\,\overline{W}\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$
B: „Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond."
Der folgende Ergebnisraum ist möglich:
$\Omega = \{MM\overline{M}; MSM; SMM\}$
Hinwies:
In den Ereignissen MSM und SMM kann nicht $\overline{M}$ verwendet werden, da darin die Wolke enthalten ist und das Spiel somit zu Ende wäre.
$P(B) = P\left(MM\overline{M}\right) + P(MSM) + P(SMM) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$

2.2 Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Sonne erscheint unter der Bedingung, dass das Spiel mit Wolke endet.
C: „Das Spiel endet mit Wolke."
D: „Es erscheint keine Sonne."
$P(C) = P(W; \overline{W}W; \overline{W}\,\overline{W}W) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{19}{27}$
$P(D) = P(W; MW; MMW)$
$P(C \cap D) = P(W; MW; MMW) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{7}{12}$
$P_C(D) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{19}{27}} = \frac{63}{76} \approx 0{,}829$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2019

2.3.1 Gesucht ist der Erwartungswert $E(X)$.

x_i	$2\ €$	$1\ €$	$0\ €$	$-1\ €$
Ereignis	☼☼☼	☼☼	☼	alle anderen
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{51}{216}$	$\frac{153}{216}$

Erwartungswert: $E(X) = 2\ € \cdot \frac{1}{216} + 1\ € \cdot \frac{11}{216} - 1\ € \cdot \frac{153}{216} = -\frac{35}{54}\ € \approx -0{,}65\ €$

Der Spielebetreiber kann langfristig gesehen mit einem Gewinn von $0{,}65\ €$ *pro Spiel rechnen.*

2.3.2 Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für $30 \leq X \leq 40$ der Auszahlung von $1\ €$:
Binomialverteilung mit

$$B_{140;\frac{17}{72}}(31 \leq X \leq 39) = B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 39) - B_{140;\frac{17}{72}}(X \leq 30) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}588$$

Die Frau des Besitzers liegt mit ihrer Antwort mit etwa $59\ \%$ *richtig.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2019

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1/2019 Vektorgeometrie

1.1 *Nachweis eines Rechtecks und dessen Fläche.*

Das Viereck ist ein Rechteck, wenn

$|\overrightarrow{B_1B_2}| = |\overrightarrow{B_3B_4}| \wedge |\overrightarrow{B_2B_3}| = |\overrightarrow{B_1B_4}| \wedge |\overrightarrow{B_1B_2}| \circ |\overrightarrow{B_2B_3}| = 0.$

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B_3B_4}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B_2B_3}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{B_1B_4}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| \circ |\overrightarrow{B_2B_3}| = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$A_{Rechteck} = |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot |\overrightarrow{B_2B_3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = 20$

Die Grundfläche ist $20\,FE = 200000\,m^2 = 0{,}2km^2$ *groß.*

1.2 *Winkel zwischen Tunnel und Grundfläche:*

Winkelberechnung zwischen Geraden und Fläche mit dem sin.

Die Grundfläche des Hbf. hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv_g}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 14{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 14{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-0{,}5|}{1 \cdot \sqrt{2{,}5^2 + 14{,}5^2 + 0{,}5^2}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{216{,}75}}$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{216{,}75}}\right) \approx 1{,}95\,°$$

1.2.2 *Untersuchung eines Sicherheitsabstandes:*

Der Sicherheitsabstand wird überall eingehalten, sofern der kleinste Abstand mindestens $20\,m$ beträgt. Ein kleinster Abstand steht stets senkrecht auf den zwei Objekten.

Gesucht ist der kleinste Abstand von zwei Geraden, nämlich der Geraden g und der Geraden durch die Punkte B_1 und B_2. Aus der gegebenen Graphik ist ersichtlich, dass diese beiden Geraden windschief sind.

Der kleinste Abstand windschiefer Geraden errechnet sich nach der Formel

$d(g;l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l}|}$ mit $\overrightarrow{rv_g}$ und $\overrightarrow{rv_l}$ als den Richtungsvektoren der beiden Geraden und $\overrightarrow{P_1P_2}$ dem Vektor zwischen den beiden Aufpunkten der Geraden g und l.

Gerade l durch B_1 und B_2:

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ==> \quad \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 14{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ | (Aufgabenstellung)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

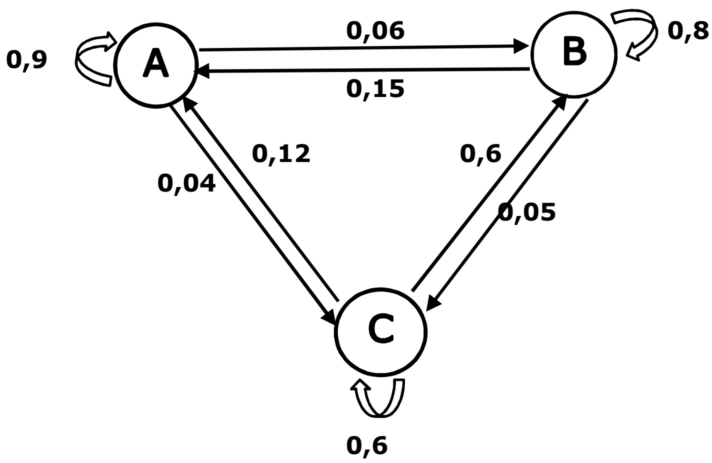
$\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 14{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \\ -46 \end{pmatrix}$

$d(g;l) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l})|}{|\overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{rv_l}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \\ -46 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2+46^2}} = \frac{18}{\sqrt{2118{,}5}} \approx 0{,}39$

Die kürzeste Entfernung zwischen der Geraden g und der Strecke $\overline{B_1B_2}$ beträgt etwa $0{,}39\ LE = 39\ m$. Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Lösung A1/2019 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsdiagramm*



Interpretation von $0{,}04$:
Das Skigebiet A verliert jährlich $4\,\%$ seiner Gäste an Skigebiet C.

1.2 *Jeweilige Anzahl der Gäste im Folgejahr:*
Von den 200000 Gästen verbringen $0{,}6 \cdot 200000 = 120000$ Gäste den Urlaub in A, $0{,}3 \cdot 200000 = 60000$ in B und $0{,}1 \cdot 200000 = 20000$ in C.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120000 \\ 60000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121000 \\ 59200 \\ 19800 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Jahr sind 121000 Gäste in A, 59200 in B und 19800 in C.
Skigebiet mit dem der größten prozentualen Unterschied im Folgejahr:
Prozentuale Änderungen:
A: $\frac{+1000}{120000} = +0{,}0083 = +0{,}83\%$ B: $\frac{-800}{60000} = -0{,}013 = -1{,}3\%$
C: $\frac{-200}{20000} = -0{,}01 = -1{,}0\%$
Das Skigebiet B hat den größten prozentualen Unterschied.

1.3 *Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020:*

Vektor für die Anzahl der Gäste im Jahr 2020 ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Anzahl der Gäste im Jahr 2021:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0{,}06(b+c) + 0{,}8b + 0{,}2c \\ \dots \end{pmatrix}$$

Nach Aufgabestellung gilt:

(1) $\quad b + c + b + c = 200000$

Aus der Matrix folgt:

(2) $\quad 0{,}06(b+c) + 0{,}8b + 0{,}2c = 63500$

(1) $\quad 2b + 2c = 200000$

(2) $\quad 0{,}86b + 0{,}26c = 63500$

(1) $\quad b = 100000 - c$

$b \rightarrow (2)$

(2) $\quad 0{,}86(100000 - c) + 0{,}26c = 63500$

$\quad c = 37500$

$c \rightarrow (1)$

$\quad b = 62500$

Im Jahr 2020 *hat* B 62.500 *Gäste,* C 37.500 *Gäste und* A 100.000 *Gäste.*

1.4 *Von Jahr zu Jahr gleich bleibende prozentuale Gästeverteilung:*

Bedingung für stationäre Verteilung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$$

Zeile 1: $0{,}9a + 0{,}15b + 0{,}12(1-a-b) = a \implies -0{,}3a - 0{,}05b = -0{,}2$

Zeile 2: $0{,}06a + 0{,}8b + 0{,}2(1-a-b) = b \implies -0{,}14a - 0{,}4b = -0{,}2$

Zeile 3: $0{,}04a + 0{,}05b + 0{,}6(1-a-b) = 1-a-b \implies 0{,}44a + 0{,}45b = 0{,}4$

Aus Zeile 1 folgt: $-0{,}05b = -0{,}2 + 0{,}3a \implies b = 4 - 6a$

$b \rightarrow$ Zeile 2:

$-0{,}14a - 0{,}4(4 - 6a)b = -0{,}2 \implies 2{,}26a = 1{,}4 \implies a = \frac{70}{113} \approx 0{,}62$

$a \rightarrow$ Zeile 1:

$b = 4 - 6 \cdot \frac{70}{113} = \frac{32}{113} \approx 0{,}28$

$a; b \rightarrow$ Zeile 3:

$0{,}44 \cdot 0{,}62 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 \stackrel{?}{=} 0{,}4$

$0{,}4 = 0{,}4 \implies$ wahre Aussage

Prozentuale Gästeverteilung: $A{:}\,62\,\%$, $B{:}\,28\,\%$, $A{:}\,10\,\%$.