Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2020

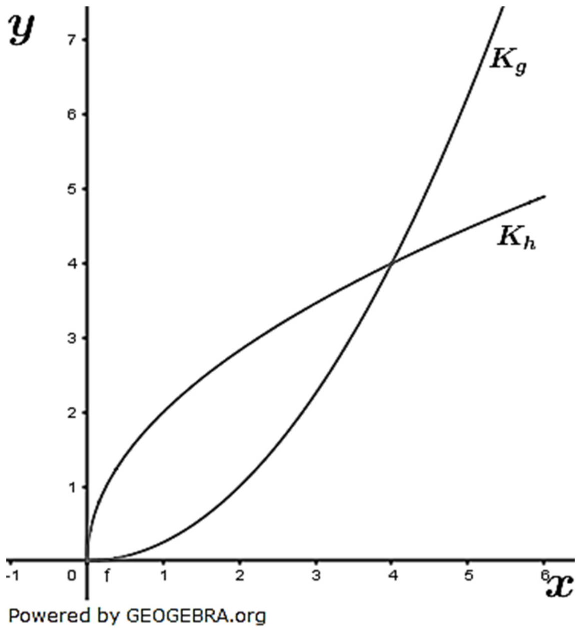
1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K_f.
Die erste Ableitung f' von f ist $f'(x) = 10 \cdot (1-x) \cdot e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$ und die zweite Ableitung f'' von f ist $f''(x) = 10 \cdot (x-2) \cdot e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Weisen Sie nach, dass $\left(1 \middle| \frac{10}{e}\right)$ der Hochpunkt von K_f ist.
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K_f an. (4P)

1.1.2 Zeichnen Sie K_f für $0 \leq x \leq 6$. (3P)

1.1.3 Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = -10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.
Bestimmen Sie den Wert von a in der Gleichung $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$. (5P)

1.2 Für $x \geq 0$ sind die Funktionen g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ und h mit $h(x) = 2\sqrt{x}$ gegeben.
Die Abbildung zeigt die Schaubilder K_g von g und K_h von h.



1.2.1 Prüfen Sie die folgende Aussage:
„Die Gerade durch die beiden Punkte $P(1|h(1))$ und $Q(2|g(2))$ ist sowohl die Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q." (4P)

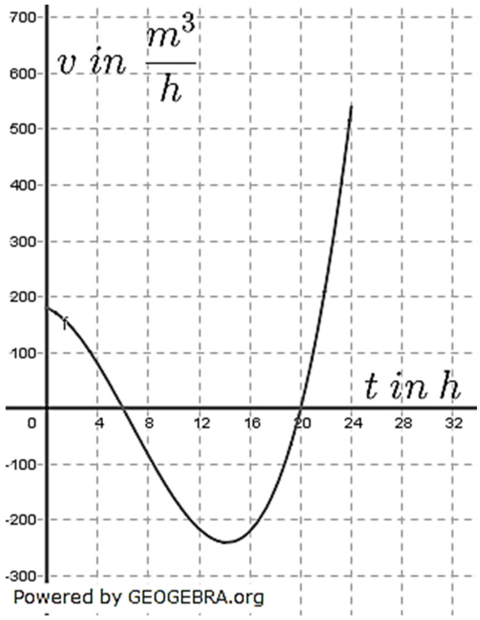
1.2.2 Die y-Achse, K_h und die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = c$ mit $c > 0$ begrenzen eine Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Bestimmen Sie den Wert von c, sodass dessen Volumen 32π beträgt.
(4P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2/2020

2. Der Wasserzufluss bzw. der Wasserabfluss eines Staubeckens wird über 24 Stunden hinweg beobachtet und durch die Funktion v mit $v(t) = \frac{1}{4} \cdot (t^2 - 36)(t - 20);\quad 0 \le t \le 24$ modelliert.
Hierbei gibt t die Zeit seit Beginn der Beobachtung (t = 0) in Stunden an. $v(t)$ wird in Kubikmeter pro Stunde $\left(\frac{m^3}{h}\right)$ gemessen.
Bei Wasserzufluss ist $v(t)$ positiv und bei Wasserabfluss ist $v(t)$ negativ.
Die Abbildung zeigt das Schaubild von v.



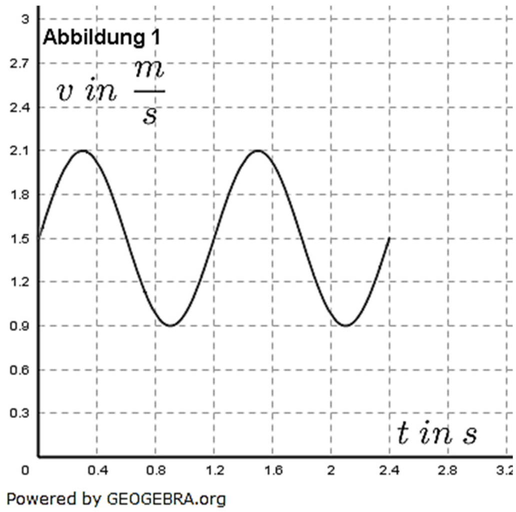
2.1 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Es gibt einen Zeitpunkt, an dem $280\ \frac{m^3}{h}$ abfließen.“
Geben Sie den maximalen Wasserzufluss und den zugehörigen Zeitpunkt an. (3P)

2.2 Berechnen Sie den Wert des Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung und wie viele Minuten vergehen, bis v diesen Wert erneut erreicht. (4P)

2.3 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich noch $1000\ m^3$ Wasser im Becken.
Erläutern Sie, wie man die Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt $t = 0$ ermitteln kann und geben Sie diese Wassermenge näherungsweise an. (3P)

Aufgabe A3/2020

3. Das Training einer Schwimmerin wird mit Videos ausgewertet. Abbildung 1 zeigt modellhaft die Geschwindigkeit v der Schwimmerin in Metern (m) pro Sekunde (s) in Abhängigkeit von der Zeit t in s. Ein Armzyklus dauert $12\ s$.



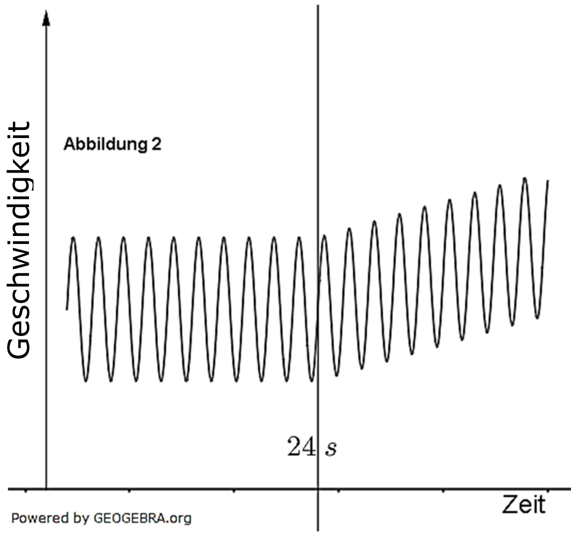
3.1 Begründen Sie mit Hilfe von Abbildung 1, dass die Geschwindigkeit t ab dem Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ durch die Funktionsgleichung $v(t) = 1{,}5 + 0{,}6\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$ beschrieben werden kann. (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

3.2 Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die gemäß des Modells während eines Armzyklus zurückgelegt wird.
Bestimmen Sie damit die Zeit, die die Schwimmerin für $36\,m$ benötigt. (3P)

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

3.3 Zum Zeitpunkt $t = 24$ beginnt die Schwimmerin ihren Endspurt. Dabei erhöht sich ihre Geschwindigkeit pro Sekunde zusätzlich um $0{,}05\,\frac{m}{s}$.
Die Geschwindigkeit der Schwimmerin ist in Abbildung 2 dargestellt und wird ab $t = 24$ durch eine Funktion v_E modelliert.

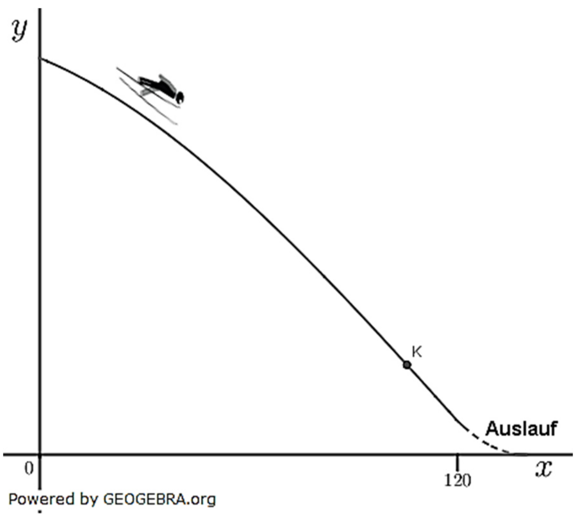


3.3.1 Interpretieren Sie den Ansatz $\int_{24}^{24+u} v_E(t)\,dt = 14$ im Sachzusammenhang. (2P)

3.3.2 Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion v_E an. (2P)

Aufgabe A4/2020

4. Die Abbildung zeigt die Aufsprungbahn einer Skisprungschanze. Der obere Teil der Aufsprungbahn wird durch f mit
$f(x) = 0{,}000012x^3 - 0{,}00378x^2 - 0{,}27x + 76$
für $0 \le x \le 120$ modelliert.
Der untere Teil der Aufsprungbahn dient als Auslauf. Alle Angaben sind in Meter.



4.1 Die Aufsprungbahn hat im kritischen Punkt K ihr größtes Gefälle.
Weisen Sie nach, dass die x-Koordinate von K den Wert 105 besitzt und berechnen Sie den Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt. (5P)

4.2 Die Flugbahn eines Skispringers wird durch die Parabel mit der Gleichung
$y = -0{,}00132x^2 - 0{,}436x + 80$ modelliert.
Prüfen Sie, ob die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ tangential in die Aufsprungbahn übergeht. (3P)

4.3 Erläutern Sie im Sachkontext, welche Größe durch die Berechnung
$$\sqrt{\left(f(0) - f(40)\right)^2 + 1600} + \sqrt{\left(f(40) - f(80)\right)^2 + 1600} + \sqrt{\left(f(80) - f(120)\right)^2 + 1600} \approx 137{,}5$$
ermittelt wird. (2P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2020

1. Bei einem Festival können Teilnehmer zwischen zwei verschiedenen Veranstaltungen wählen. Erfahrungsgemäß besuchen $36\,\%$ aller Teilnehmer die Beachparty, während alle anderen zum Rockkonzert gehen. Die Tickets für das Festival kann man entweder online oder an der Abendkasse kaufen. Langjährige Erfahrungswerte zeigen, dass die Teilnehmer der Beachparty zu $70\,\%$ ihr Ticket online erwerben. Außerdem weiß man, dass insgesamt $26{,}8\,\%$ aller Teilnehmer ihr Ticket an der Abendkasse kaufen.

1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E_1: Von 5 zufällig ausgewählten Teilnehmern besuchen alle die Beachparty.
E_2: Von 30 zufällig ausgewählten Teilnehmern gehen mindestens 20 zur Beachparty.
E_3: Von 1000 Teilnehmern des Festivals besuchen mindestens 380, jedoch höchstens 390 Leute die Beachparty. (6P)

1.2 Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket online erwirbt.
Ein Teilnehmer hat sein Ticket online erworben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dann Teilnehmer der Beachparty ist. (5P)

1.3 Für die Beachparty im Sommer 2020 stehen 1500 Tickets zur Verfügung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ sollen alle der am Festival Interessierten, die zur Beachparty gehen möchten, tatsächlich ein Ticket für die Beachparty erhalten.
Ein Schüler behauptet, dass somit die Anzahl n aller am Festival Interessierten unter 3890 liegen muss.
Überprüfen Sie diese Behauptung und ermitteln Sie den maximalen Wert für n. (4 P)

Aufgabe A2/2020

2. Bei einer großen Feier werden ein Hauptgericht mit Fleisch, ein vegetarisches Hauptgericht, sowie anschließend eine Nachspeise angeboten. Die Planer greifen auf langjährige Erfahrungswerte ihrer Vorgänger zurück, bei denen alle Gäste genau ein Hauptgericht wählen, jedoch nur $85\,\%$ der Gäste eine Nachspeise nehmen. $30\,\%$ aller Gäste entscheiden sich für das vegetarische Hauptgericht. Von den Gästen, die sich für ein vegetarisches Hauptgericht entschieden haben, nehmen anschließend $75\,\%$ auch eine Nachspeise.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Gast ein Hauptgericht mit Fleisch wählt und eine Nachspeise nimmt.
Beziehen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Von denjenigen Gästen, die eine Nachspeise nehmen, ist der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als $27\,\%$." (6 P)

2.2 Eine Planung geht zunächst von 800 Gästen aus.
Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Genau 240 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
B: Höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht.
C: Mehr als 220, aber höchstens 250 Gäste wählen das vegetarische Hauptgericht. (6 P)

2.3 Bei einem Stichprobenumfang von 80 Gästen gaben 30 an, dass sie ein vegetarisches Hauptgericht wählen werden.
Beurteilen Sie auf der Basis eines $95\,\%$ - Vertrauensintervalls, ob die Planer dem oben genannten langjährigen Erfahrungswert vertrauen können. (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* 2020

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1/2020

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1. Ein Architekt plant ein modernes Museum. Im Modell hat das Museum eine rechteckige Grundfläche mit den Eckpunkten $A_1(0|0|0)$, $B_1(10|0|0)$, $C_1(10|5|0)$, $D_1(0|5|0)$ und ein Dach, das aus den vier Eckpunkten $A_2(0|0|2)$, $B_2(10|0|2)$, $C_2(10|6|2)$ und $D_2(0|5{,}5|2{,}5)$ gebildet wird.
Die von der Grundfläche zum Dach verlaufenden Kanten des Modells verbinden Punkte gleichen Buchstabens, z.B. ist A_1 mit A_2 verbunden.
Eine Längeneinheit im Modell entspricht 10 Meter (m).

1.1 Zeichnen Sie das Modell in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 P)

1.2 Die Vorderseite des Modells (d.h. der Schnitt mit der Ebene $x_1 = 10$) bildet ein Trapez. Diese Fläche soll zu $80\,\%$ aus einem Spezialglas bestehen, das 400 Euro pro m^2 kostet.
Berechnen Sie die hierfür zu kalkulierenden Kosten. (3 P)

1.3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ teilt das Dach in zwei dreieckige Flächen.
Bestimmen Sie den Winkel den diese beiden Flächen im Innern des Modells bilden. (4 P)

1.4 Im Punkt C_2 soll ein Laser installiert werden, der den Laserstrahl in Richtung $\overline{C_1C_2}$ geradlinig in den Himmel schickt.
Entsprechend soll im Punkt D_2 ein weiterer Laser mit Laserstrahl in Richtung $\overline{D_1D_2}$ installiert werden.

1.4.1 Geben Sie für jeden der beiden Laserstrahlen eine Gleichung der entsprechenden Geraden an. (2 P)

1.4.2 Bestimmen Sie die Höhe über der Grundfläche, in der diese beiden Laserstrahlen genau $212{,}5\,m$ voneinander entfernt sind. (2 P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

Aufgabe A1/2020 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

1 Eine Nudelmanufaktur stellt aus Wasser, Grieß und Spinat weiße und grüne Nudeln her, die in zwei verschiedenen Packungen „Pur" und „Mix" angeboten werden.
Die folgenden Tabellen zeigen die verwendeten Mengen in Kilogramm (kg). Dabei geht man davon aus, dass 1 Liter (l) Wasser einem kg entspricht.

	grüne Nudeln	weiße Nudeln
Wasser	0,2	b
Grieß	a	0,8
Spinat	0,3	0

	„Pur"	„Mix"
Grüne Nudeln	0,5	c
Weiße Nudeln	0	c

	„Pur"	„Mix"
Wasser	0,1	0,1
Grieß	0,25	0,325
Spinat	0,15	0,075

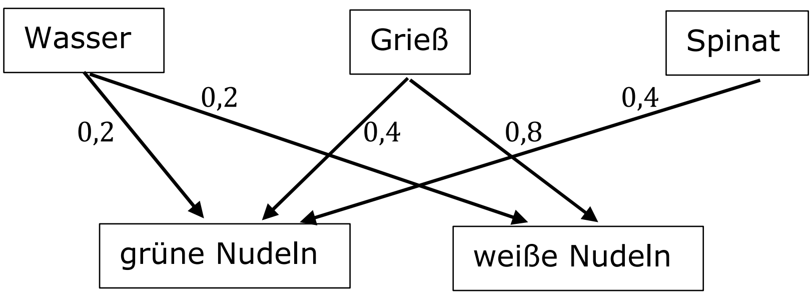
1.1 Berechnen Sie den jeweiligen Wert für a, b und c. (3P)

1. 2 Ein Auftrag besteht aus 2000 Packungen „Pur" und 1000 Packungen „Mix".

1.2.1 Bestimmen Sie jeweils, wie viel kg Grieß bzw. Spinat für den Auftrag benötigt werden. (2 P)

1.2.2 Die auf den Auftrag bezogenen Fixkosten betragen 200 Euro. Die variablen Herstellkosten pro Packung „Pur" betragen 50 Cent (ct), pro Packung „Mix" 40 ct.
Der Preis pro Packung „Pur" soll 50 % höher sein, als der Preis für „Mix".
Bestimmen Sie jeweils den Preis für eine Packung „Pur" bzw. „Mix", sodass der Verkaufserlös um 25 % höher ist als die Gesamtkosten. (4P)

1.3 Durch eine neue Rezeptur verändert sich der Bedarf für die Herstellung der beiden Nudelsorten wie folgt:



Im Lager befinden sich 2000 kg Grieß, die vollständig nach der neuen Rezeptur verarbeitet werden soll. Mindestens 40 % der hergestellten Nudeln sollen dabei grün sein.
Ermitteln Sie alle möglichen Wassermengen, die hierbei verbraucht werden.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2020

1.1.1 $\left(1|\frac{10}{e}\right)$ *ist Hochpunkt von* K_f*:*

Punktprobe:

$\frac{10}{e} = 10 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e}$

$f'(1) = 10 \cdot (1-1) \cdot e^{-1} = 0$

$f''(1) = 10 \cdot (1-2) \cdot e^{-1} < 0$

Der Punkt $P\left(1|\frac{10}{e}\right)$ *ist Hochpunkt von* K_f.

Gleichung der Asymptote von K_f*:*

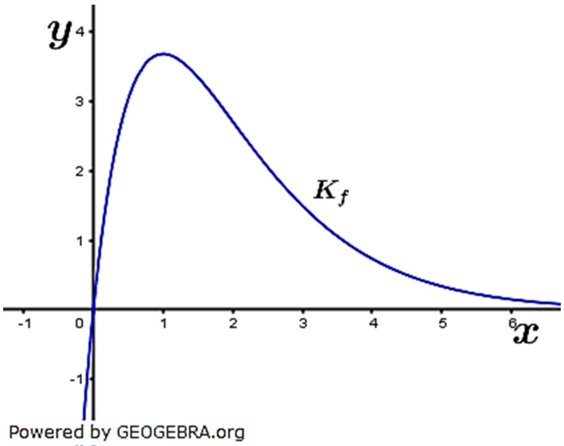
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Gleiching der Asymptote:

$y = 0$.

1.1.2 Zeichnung von K_f:

Wertetabelle über den WTR erstellen und Graph von K_f zeichnen.



1.1.3 $F(x) = -10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$ *ist Stammfunktion von* f*:*

$F'(x) = f(x)$

Für $F'(x)$ wird die Produkt- und Kettenregel benötigt:

$u = -10 \cdot (x+1) = -10x - 10 \qquad u' = -10$

$v = e^{-x} \qquad v' = -e^{-x}$

$F'(x) = u'v + v'u = -10 \cdot e^{-x} - 10(x+1) \cdot (-e^{-x})$

$F'(x) = -10 \cdot e^{-x} + 10(x+1) \cdot e^{-x} = 10 \cdot e^{-x}(-1 + x + 1)$

$F'(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x} = f(x)$ ***q.e.d.***

Wert von a*:*

$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -30e^{-2} + 20e^{-1} = -\frac{30}{e^2} + \frac{20}{e} = \frac{-30+20e}{e^2}$

$\frac{-30+20e}{e^2} = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$

$a = 20$

1.2.1 *Gerade durch* P *und* Q*:*

$P\big(1\big|h(1)\big) = P(1|2);\ \ Q\big(2\big|g(2)\big) = Q(2|1)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - *x_1} = \frac{2-1}{1-2} = -1$

g: $g(x) = -1(x-1) + 2 = -x + 3$

$g'(x) = \frac{1}{2}x;\quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g'(2) = 1;\quad h'(1) = 1$

Die Steigung der Tangenten in $Q(2|g(2))$ als auch $P(1|h(1))$ ist jeweils $m_1 = 1$. Wegen $m_N = -\frac{1}{m_T}$ ist somit die Gerade durch P und Q Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q.

1.2.2 *Rotationsvolumen:*
Die seitliche Grafik verdeutlicht die Situation.
Wir benötigen zunächst den Schnittpunkt von $y = c$ mit $h(x) = 2\sqrt{x}$. Das Integrationsintervall ist dann von 0 bis x_c.

$2\sqrt{x} = c$ | $:2$
$\sqrt{x} = \frac{c}{2}$ | ^{2}
$x = \frac{c^2}{4}$
$\pi \cdot \int_0^{\frac{c^2}{4}} \left(c^2 - \left(2\sqrt{x}\right)^2\right) dx = 32\pi$ | Rotationsvolumen zwischen oberer und unterer Kurve
$\int_0^{\frac{c^2}{4}} (c^2 - 4x)\, dx = [c^2 \cdot x - 2x^2]_0^{\frac{c^2}{4}} = \frac{c^4}{4} - 2 \cdot \frac{c^4}{16} - 0 = \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{8} = \frac{1}{8}c^4$
$\int_0^{\frac{c^2}{4}} \left(c - 2\sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{8}c^4$
$\frac{1}{8}c^4 = 32$ | $\cdot 8$
$c^4 = 256$ | $\sqrt[4]{\ }$
$c = \pm 4$
Wegen Aufgabenstellung $c > 0$ *ist* $c = 4$ *der gesuchte Wert.*

Lösung A2/2020

2.1 *Stellung zu „Es gibt einen Zeitpunkt, an dem* $280\ \frac{m^3}{h}$ *abfließen."*
Diesen Zeitpunkt gibt es nicht. Im Tiefpunkt bei $t_0 \approx 14$ liegt ein Wasserabfluss von etwa $280\ \frac{m^3}{h}$ vor.
Maximaler Wasserzufluss und zugehöriger Zeitpunkt:
Der maximale Wasserzufluss ist um Mitternacht mit etwa $500\ \frac{m^3}{h}$.

2.2 *Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung:*
$v(0) = \frac{1}{4} \cdot (0 - 36)(0 - 20) = \frac{1}{4} \cdot 720 = 180$
Zu Beginn der Beobachtung fließen $180\ \frac{m^3}{h}$ Wasser zu.
Anzahl Minuten, bis v *diesen Wert erneut erreicht:*
$v(t) = 180 = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 36)(x - 20)$ | $\cdot 4$
$(x^2 - 36)(x - 20) = 720$
$x^3 - 20x^2 - 36x + 720 = 720$ | -720
$x^3 - 20x^2 - 36x = 0$
$x(x^2 - 20x - 36) = 0$^ | Satz vom Nullprodukt
$x^2 - 20x - 36 = 0$
$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + 36} = 10 \pm \sqrt{136} = 10 \pm 11{,}66$
$x_1 = 21{,}66\ h = 1299{,}6\ min$
Nach etwa 1300 *Minuten erreicht* v *wieder die gleiche Geschwindigkeit wie zu Beginn der Beobachtung.*

2.3 *Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt $t = 0$:*
Nach 20 Stunden sind noch $1000\, m^3$ Wasser im Becken.
Der Anfangsbestand errechnet sich aus diesen $1000\, m^3$ abzüglich $\int_0^{20} v(t)\ dt$.
Der Wert dieses Integrals entspricht aber der Flächenbilanz zwischen und der -Achse. Näherungsweise zählen wir die Kästchen ab.
Wir haben etwa $1{,}5$ Kästchen Wasserzufluss zwischen 0 und 6 Uhr, sowie etwa $5{,}5$ Kästchen Wasserabfluss zwischen 6 Uhr und 20 Uhr. Per Saldo haben wir also 4 Kästchen Wasserabfluss. Bei einem Volumen pro Kästchen von $4\, h \cdot 100\ \frac{m^3}{h} = 400\, m^3$ sind dies also $1600\, m^3$ Wasserabfluss. Bei $1000\, m^3$ Wasserstand um 20 Uhr, müssen sich zu Beginn also $2600\, m^3$ Wasser im Becken befunden haben.
Berechnung:

$$V(0) = 1000 - \frac{1}{4}\int_0^{20}(t^2-36)(t-20)\,dt = 1000 - \frac{1}{4}\int_0^{20} t^3 - 20t^2 - 36t + 720\,dt$$

$$V(0) = 1000 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{20}{3}t^3 - 18t^2 + 720t\right]_0^{20} = 1000 - \frac{1}{4}(-6133{,}33) = 2533{,}33$$

Rechnerisch waren zu Beginn der Beobachtung etwa $2530\, m^3$ Wasser im Becken.

Lösung A3/2020

3.1 *Begründung für eine Funktionsgleichung:*
Abbildung 1 zeigt eine Sinuskurve vom Typ $f(t) = a \cdot \sin(bt) + d$.

$$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{2{,}1-0{,}9}{2} = 0{,}6$$

$$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{2{,}1+0{,}9}{2} = 1{,}5$$

Die Periode ist $p = 1{,}2$

$$b = \frac{2\pi}{1{,}2} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

Die abgebildete Sinuskurve hat somit die Funkionsgleichung

$f(t) = 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5$ **q.e.d.**

3.2 Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg das Integral über die Geschwindigkeit im gesuchten Intervall. Es gilt somit:

$$s_{1,2} = \int_0^{1,2}\left(0{,}6\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5\right)dt$$

$$s_{1,2} = \left[\frac{3}{5\pi}\cdot\left(-0{,}6\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5t\right)\right]_0^{1,2} = \left(-\frac{3}{5\pi}\cdot 0{,}6\cos(2\pi) + 1{,}8 + \frac{1{,}8}{5\pi}\right)$$

$$s_{1,2} = 1{,}8$$

Die Schwimmerin legt innerhalb eines Armzyklus $1{,}8$ Meter zurück.
36 Meter entspricht $\frac{36}{1{,}8} = 20$ Armzyklen.
Zeit für 36 Meter = $20 \cdot 1{,}2\, s = 24\, s$.
Die Schwimmerin benötigt 24 Sekunden für 36 Meter.

3.3.1 *Interpretation des Ansatzes $\int_{24}^{24+u} v_E(t)\,dt = 14$*
Welche Zeit u in Sekunden benötigt die Schwimmerin ab der 24. Sekunde um weitere 14 Meter zu schwimmen?

3.3.2 *Funktionsterm für die Funktion v_E:*
$v_E(t) = v(t) + 0{,}05 \cdot (t - 24)$ für $t \geq 24$
Hinweis:
$v_E(t) = v(t) + 0{,}05 \cdot t$ wäre falsch, da man hier davon ausgehen würde, dass sich die Geschwindigkeit schon ab $t = 0$ um $0{,}05\frac{m}{s}$ wächst (und nicht erst ab $t = 24$).

Lösung A4/2020

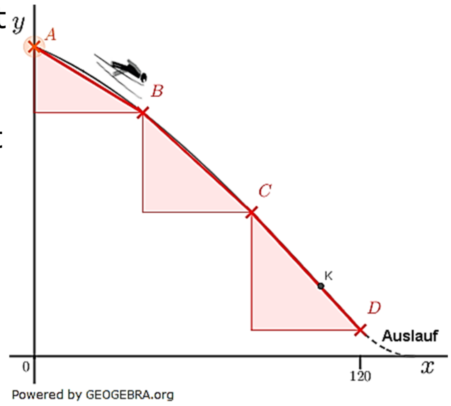
4.1 *x-Koordinate des Aufsetzpunktes K:*
Größte Steigungen bzw. größtes Gefälle herrscht in den Wendepunkten vor.
$f'(x) = 0{,}000036x^2 - 0{,}00756x - 0{,}27$
$f''(x) = 0{,}000072x - 0{,}00756$
$f''(x) = 0$
$0{,}000072x - 0{,}00756 = 0$
$0{,}000072x = 0{,}00756$
$x = 105$

Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt:
$f'(105) = 0{,}000036 \cdot 105^2 - 0{,}00756 \cdot 105 - 0{,}27 = -0{,}6669$
$tan(\alpha) = f'(105) = -0{,}6669$
$\alpha = arctan(-0{,}6669) = -33{,}699°$
Dies ist der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K „im Uhrzeigersinn" bildet. Der Aufsprungwinkel mit der Horizontalen ist dann
$\alpha^* = 180\,° + \alpha = 180\,° - 33{,}699\,° = 146{,}3\,°$
Der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K einschließt beträgt etwa $146{,}3\,°$.

4.2 *Prüfung, ob die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ tangential in die Aufsprungbahn übergeht:*
Die bedingung hierfür ist, dass $f(100) = P(100) \wedge f'(100) = p'(100)$ ist.
$p(x) = -0{,}00132x^2 - 0{,}436x + 80$
$p'(x) = -0{,}00264x - 0{,}436$
$p(100) = 23{,}2$
$p'(100) = -0{,}7$
$f(100) = 23{,}2$
$f'(100) = -0{,}666$
Wegen $f'(100) \neq p'(100)$ *geht die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ nicht tangential in die Aufsprungbahn über.*

4.3 *Erläuterung einer Größe im Sachkontext:*
Bei den Wurzeltermen handelt es sich jeweils um die Abstandsformeln zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem.
Durch die Terme $f(0)$, $f(40)$, $f(80)$ und $f(120)$ erkennt man, dass es um Punkte geht, die auf dem Schaubild von f (also auf der Aufsprungbahn) liegen mit den x-Werten $x = 0$, $x = 40$, $x = 80$ und $x = 120$.

Die Punkte sind in der Skizze eingezeichnet $A(0|f(0))$, $B(40|f(40))$, $C(80|f(80))$ und $D(120|f(120))$.

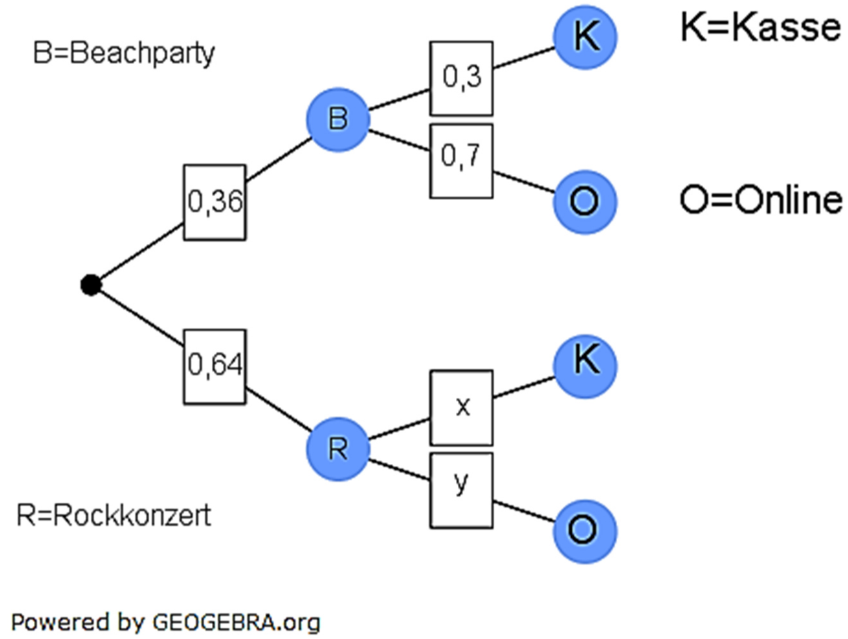


Der Term $\sqrt{(f(0)-f(40))^2+1600}$ beschreibt den Abstand der Punkte A und B (Satz des Pythagoras).
Die beiden anderen Wurzelterme beschreiben den Abstand der Punkte B und C bzw. der Punkte C und D.
Die Summe der drei Längen ergibt den berechneten Wert von etwa $137{,}5$ Meter.
Die Summe der Längen stellt eine Näherung für die Länge der oberen Aufsprungbahn dar.

Teil3 - Stochastik
Lösung A1/2020

1.1 Berechnungen von Binomialverteilungen:
$P(E_1) = B_{5;0{,}36}(X = 5) = 0{,}0060$
$P(E_2) = B_{30;0{,}36}(X \geq 20) = 1 - B_{30;0{,}36}(X \leq 19) = 0{,}00062$
$P(E_3) = B_{1000;0{,}36}(380 \leq X \leq 390) = B_{1000;0{,}36}(X \leq 390) - B_{1000;0{,}36}(X \leq 379)$
$P(E_3) = 0{,}97729 - 0{,}9002 = 0{,}07709$

1.2 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



Nach Aufgabenstellung gilt: $26{,}8\,\%$ aller Teilnehmer kaufen ihr Ticket an der Abendkasse.
$P(Kasse) = 0{,}268 = P(B \cap K) + P(R \cap K)$
$P(B \cap K) = 0{,}36 \cdot 0{,}3 = 0{,}108; \quad P(R \cap K) = 0{,}64 \cdot x$
$0{,}108 + 0{,}64 \cdot x = 0{,}268$
$0{,}64 \cdot x = 0{,}16$
$x = \frac{0{,}16}{0{,}64} = 0{,}25$
$y = 1 - x = 0{,}75$
$P(R \cap O) = 0{,}64 \cdot 0{,}75 = 0{,}48$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer das Rockkonzert besucht und sein Ticket Online erwirbt, beträgt $48\,\%$.
Wahrscheinlichkeit, dass jemand Teilnehmer der Beachparty ist unter der Bedingung, dass er sein Ticket Online erworben hat:
Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit:
$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}7}{1 - 0{,}268} = \frac{0{,}252}{0{,}732} = 0{,}344 = 34{,}4\,\%$
$34{,}4\,\%$ *der Teilnehmer, die ihr Ticket Online erworben haben, gehen zur Beachparty.*

1.3 Binomialverteilung, bei der der Stichprobenumfang gesucht ist:

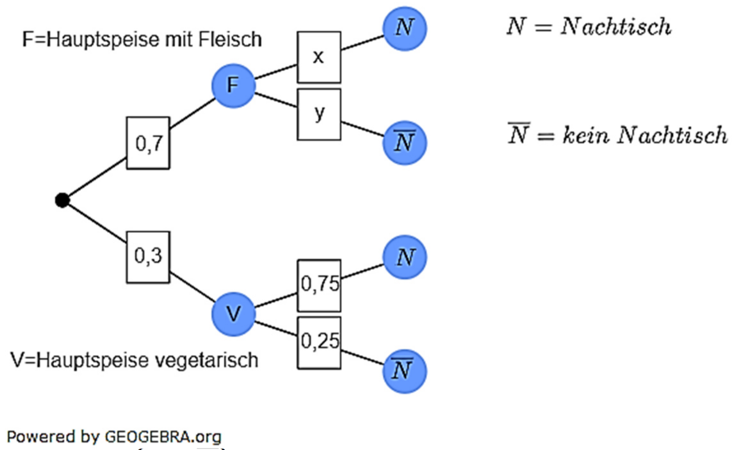
$B_{n;0,36}(X \leq 1500) \geq 0{,}99$

n	$B_{n;0,36}(X \leq 1500)$
3980	0,9871
3975	0,9890
3974	0,9893
3972	0,9900

Die maximale Anzahl der Teilnehmer beträgt 3972 und liegt somit unter 3980. Der Schüler hat Recht.

Lösung A2/2020

2.1 Zur Verdeutlichung der Situation dient das nachfolgende Baumdiagramm:



$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x;\quad P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot y$

$P(V \cap N) = 0{,}3 \cdot 0{,}75;\quad P(F \cap \overline{N}) = 0{,}3 \cdot 0{,}25$

Gemäß Aufgabenstellung nehmen $85\,\%$ Prozent der Gäste einen Nachtisch:

$P(F \cap N) + P(V \cap N) = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}85$

$0{,}7 \cdot x = 0{,}85 - 0{,}225$

$x = \frac{25}{28}$

$y = 1 - x = \frac{3}{28}$

$P(F \cap N) = 0{,}7 \cdot x = 0{,}7 \cdot \frac{25}{28} = 0{,}625 = 62{,}5\,\%$

Ein zufällig ausgewählter Gast wählt mit $62{,}5\,\%$ ein Hauptgericht mit Fleisch und eine Nachspeise.

Anteil der Gäste mit Nachspeise, die auch vegetarisches Gericht wählen:
Hierbei handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass der Gast eine Nachspeise nimmt.

$P_N(V) = \frac{P(N \cap V)}{P(N)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}75}{0{,}85} = 0{,}265 = 26{,}5\,\%$

Die Aussage, dass der Anteil der Gäste, die auch ein vegetarisches Hauptgericht wählen, größer als $27\,\%$ ist, ist falsch, denn $P_N(V) = 26{,}5\,\%$.

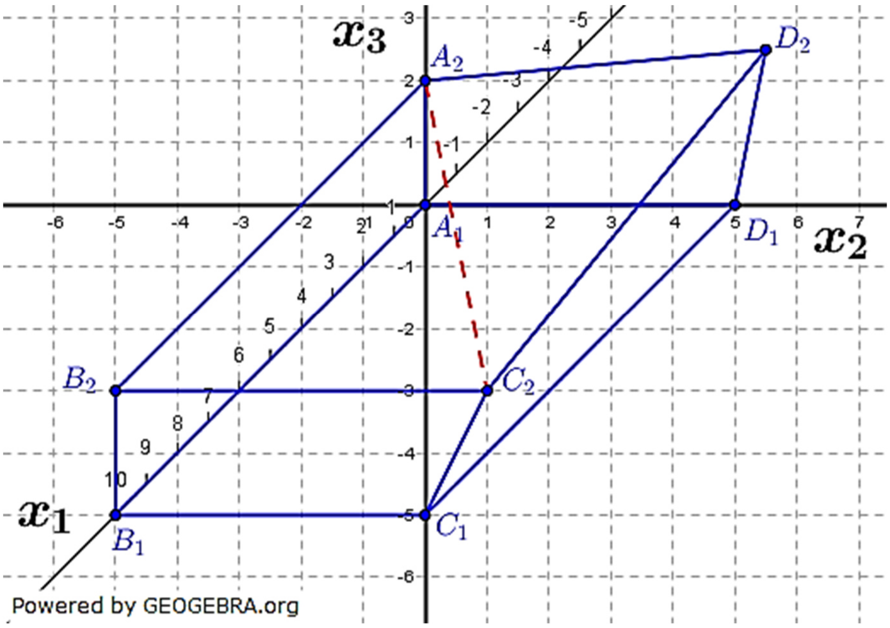
2.2 Berechnungen von Binomialverteilungen:
$P(A) = B_{800;0,3}(X = 240) = 0{,}0308$
$P(B) = B_{800;0,3}(X \leq 250) = 0{,}7916$
$P(C) = B_{800;0,3}(221 \leq X \leq 250) = B_{800;0,3}(X \leq 250) - B_{800;0,3}(X \leq 220)$
$P(C) = 0{,}7916 - 0{,}0653 = 0{,}7263$

2.3 Die relative Häufigkeit der Gäste mit vegetarischem Gericht ist $\frac{30}{80} = 0{,}375$.
Vertrauensintervall mit $95\,\%$-Sicherheitswahrscheinlichkeit:
$$\left[0{,}375 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}; 0{,}375 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}375 \cdot 0{,}625}{80}}\right] = [0{,}2689; 0{,}4810]$$
Die angenommene Wahrscheinlichkeit von $P = 0{,}3$ liegt in dem Intervall. Somit können die Planer auf Basis dieses Intervalls dem Erfahrungswert zu $95\,\%$ vertrauen.

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1/2019 Vektorgeometrie

1.1 *Objekt im Koordinatensystem:*



1.2 *Kosten der Trapezfläche:*

$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{50+60}{2} \cdot 20 = 1100\, m^2.$

$K_{Trapez} = A_{Trapez} \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 1100 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 352000{,}00\,€.$

1. 3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ führt zu zwei Flächen. Fläche 1 geht durch die Punkte A_2, B_2 und C_2, Fläche 2 durch die Punkte A_2, C_2 und D_2. Gesucht ist der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Ebene 1:

$E_1\colon\ x_3 = 2 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene 2:

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \left(\overrightarrow{C_2A_2}\right) \times \left(\overrightarrow{C_2D_2}\right) = \begin{pmatrix} 0-10 \\ 0-6 \\ 2-2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-10 \\ 5{,}5-6 \\ 2{,}5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -55 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+25+3025}} = \frac{55}{\sqrt{3059}}$

$\varphi = arccos\left(\frac{55}{\sqrt{3059}}\right) = 6{,}05\,°$

Im Innern des Gebäudes liegt jedoch ein stumpfer Winkel zwischen den beiden Flächen vor, somit $\varphi + 180\,°$.

Die beiden Flächen schließen im Inneren einen Winkel von etwa $106\,°$ *ein.*

1.4.1 *Gleichung der Gerade durch die Punkte C_1 und C_2 :*

$$g:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OC_1} + r \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10-10 \\ 6-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Gerade durch die Punkte D_1 und D_2 :

$$h:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OD_1} + s \cdot \overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5{,}5-5 \\ 2{,}5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Allgemeiner Punkt auf g: $P(10|5+r|2r)$
Allgemeiner Punkt auf h: $Q(0|5+0{,}5s|2{,}5s)$
Nach Aufgabenstellung sollen die Laserstrahlen auf gleicher Höhe sein, also:

$2r = 2{,}5s$ ➔ $s = \frac{4}{5}r$

$P(10|5+r|2r)$

$Q(0|5+0{,}4r|2r)$

Abstand zweier Punkte über den Satz des Pythagoras:

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(10-0)^2 + (5+r-5-0{,}4r)^2} = \sqrt{100+0{,}36r^2}$

Der Abstand soll $212{,}5\,m$ betragen, also $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 21{,}25$

$\sqrt{100+0{,}36r^2} = 21{,}25 \qquad | \quad ^2$

$100+0{,}36r^2 = 451{,}5625$

$0{,}36r^2 = 351{,}5625$

$r^2 = 976{,}5625 \qquad | \quad \sqrt{\ }$

$r = 31{,}25$

Wegen $x_3 = 2r$ haben die beiden Laserstrahlen in einer Höhe von $625\,m$ einen Abstand von $212{,}5\,m$.

Lösung A1/2020

1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & b \\ a & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}325 \\ 0{,}15 & 0{,}075 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & b \\ a & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2c+bc \\ 0{,}5a & ac+0{,}8c \\ 0{,}15 & 0{,}3c \end{pmatrix}$$

Vergleich des Ergebnisses mit Matrix $\boldsymbol{C}$:

$0{,}5a = 0{,}25$ ➔ $a = 0{,}5$

$0{,}3c = 0{,}075$ ➔ $c = 0{,}25$

$0{,}2c + bc = 0{,}1$

$0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}25b = 0{,}1$

$0{,}25b = 0{,}1 - 0{,}05$ ➔ $b = 0{,}2$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2020

1.2.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}325 \\ 0{,}15 & 0{,}075 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 825 \\ 375 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden 825 kg Grieß und 375 kg Spinat benötigt.

1.2. 2 Variabler Herstellkostenvektor: $\overrightarrow{k_V} = (0{,}5 \quad 0{,}4)$

Kosten des Auftrags: $K = \overrightarrow{k_V} \cdot \vec{p} + 200 = (0{,}5 \quad 0{,}4) \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} + 200 = 1600$ €.

Der Verkaufserlös soll $1600 \cdot 1{,}25 = 2000$ Euro betragen.
Preis für Packung „Mix“ sei p
Preis für Packung „Pur“ $= 1{,}5p$
Bedingung: $1000 \cdot p + 2000 \cdot 1{,}5p = 4000p$
$4000p = 2000$ ➔ $p = 0{,}5$
Der Preis für eine Packung „Mix“ beträgt $0{,}50$ €
Der Preis für eine Packung „Pur“ beträgt $0{,}75$ €.

1.3 Neue Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

Rohstoffvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Zwischenproduktvektor: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$r_1 =$ Menge des Wassers
$r_3 =$ Menge des Spinats
$z_1 =$ Menge der grünen Nudeln
$z_2 =$ Menge der weißen Nudeln

$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$

(I) $0{,}2z_1 + 0{,}2z_2 = r_1$
(II) $0{,}4z_1 + 0{,}8z_2 = 2000$
(III) $0{,}4z_1 = r_3$
Aus (II) folgt:
(II) $z_2 = 2500 - 0{,}5z_1$
Da $z_2 \geq 0$ gelten muss, folgt aus (III):
$z_1 \leq 5000$
Es können maximal $5000\,kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.

Mindestens $40\,\%$ der Nudeln sollen grün sein:
$z_1 \geq 0{,}4 \cdot (z_1 + z_2)$ ➔ $0{,}6z_1 \geq 0{,}4z_2$
$z_1 \geq \frac{2}{3}z_2$
Es müssen mindestens $z_1 = \frac{2}{3}z_2$ grüne Nudeln hergestellt werden.
Eingesetzt in obige (II):
$z_2 = 2500 - 0{,}5 \cdot \frac{2}{3}z_2$
$\frac{4}{3}z_2 = 2500$
$z_2 = 1875$
Daraus folgt:
$z_1 = \frac{2}{3}z_2 = \frac{2}{3} \cdot 1875 = 1250$
Es müssen mindestens $1250\ kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.
(II) => (I)
$0{,}2z_1 + 0{,}2 \cdot (2500 - 0{,}5z_1) = r_1$
$500 + 0{,}1z_1 = r_1$
Mit $z_1 = 1250$ (Mindestmenge) folgt $r_1 = 625$
Mit $z_2 = 5000$ (Maximalmenge) folgt $r_1 = 1000$
Es werden zwischen 625 Liter und 1000 Liter Wasser verbraucht.