Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2021

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -e^{2x} + 4e^{x};\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt.
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0|3)$ und $N(ln\,(4)|0)$ sind. (2P)

1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f' von f gilt: $f'(x) = 2e^{x} \cdot (2 - e^{x})$.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extremums von K. (4P)

1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1{,}5$. (3P)

1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; ln\,(4)]$. (3P)

1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P|c)$ und $Q(x_q|c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.

1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. (2P)

1.5.2 Es gilt nun $c = 1$.
Zeigen Sie, dass dann die y-Achse die Strecke $\overline{PQ}$ halbiert. (4P)

1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an. (2P)

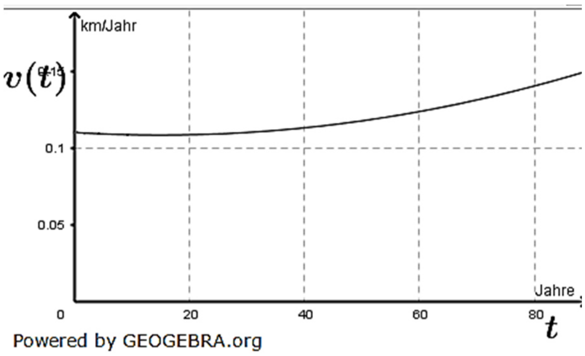
Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2/2021

2. Bei der Untersuchung einer Gletscherspalte eines Alpengletschers wurden im Jahr 2012 im Gletschereis nur wenige Zentimeter über dem Grund des Gletschers Ausrüstungsteile gefunden, die im Jahr 1950 von Bergsteigern im Gletschereis zurückgelassen wurden.
Im Laufe der Zeit hatten sich die Ausrüstungsteile mit dem Gletscher talwärts bis zur Fundstelle bewegt. Durch eine dort in den Gesteinsboden verankerte Eisenstange wurde der Fundort der Ausrüstungsteile markiert. Der Ort, an dem der Gletscher talwärts endet, lag 2012 noch 7 Kilometer (km) vom Fundort der Ausrüstungsteile entfernt. Aufgrund der Klimaerwärmung der letzten Jahrzehnte zieht sich das Gletscherende zurück. Es bewegt sich um durchschnittlich 200 Meter (m) pro Jahr in Richtung des Fundorts.

2.1 Betrachtet wird der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung.
Begründen Sie, dass dieser Abstand bezogen auf das Jahr 2012 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}2x + 7$ beschrieben werden kann.
Geben Sie die Bedeutung von x im Sachkontext an. (3P)

2.2 Die Funktion v mit
$v(t) = 7{,}56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4}t + 0{,}11;\ t > 0$ modelliert die Geschwindigkeit (in km pro Jahr) des Gletschers bei seiner Bewegung talwärts. Hier entspricht $t = 0$ dem Jahr 1950. Das Schaubild von v ist in der Abbildung dargestellt.



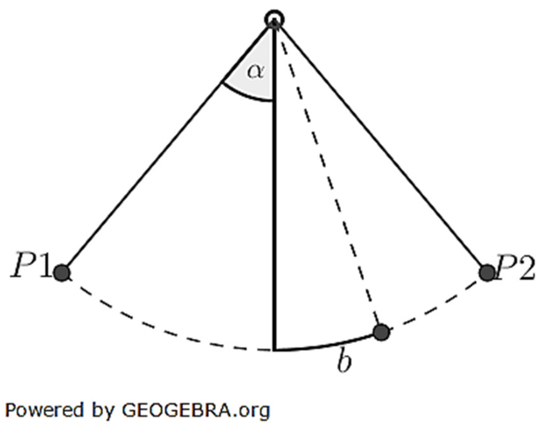
2.2.1 Bestimmen Sie $v(71)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. (2P)

2.2.2 Prüfen Sie, ob mit Hilfe von v belegbar ist, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa $115\,m$ pro Jahr talwärts bewegt hat. (3P)

2.2.3 Bei der Bergung der Ausrüstungsteile wurden kleine Ausrüstungsteile übersehen, sodass diese im Eis zurückblieben.
Formulieren Sie eine Frage im Sachkontext, die durch Lösen der Gleichung
$\int_{62}^{62+x} v(t)\,dt = -0{,}2x + 7$ mit $x > 0$ beantwortet werden kann. (3P)

Aufgabe A3/2021

3. Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position $P1$ gebracht und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Anschließend führt es eine Schwingung aus. Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit
$v(t) = 0{,}5 \cdot sin(5t)$ mit $t \geq 0$.
Dabei wird t die Zeit in Sekunden (s) und $v(t)$ wird in Meter pro Sekunde $(\frac{m}{s})$ angegeben.



3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt $P2$ erreicht. (2P)

3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel $0{,}2$ Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten $0{,}2$ Sekunden. (3P)

3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t)\,;\ \ t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei $b(t)$ die „Länge" des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (siehe Abbildung).
Negative Werte von $b(t)$ bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von $P1$), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.

3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt. (3P)

3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist $0{,}4\,m$.
Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung). (2P)

Aufgabe A4/2021

4. Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.
Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α-Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{kt};\ \ t \geq 0$ beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und $f(t)$ die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn $t = 0$ vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).

4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch $99{,}14$ g Radium vorhanden sind. (3P)

4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz
$$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$$
bestimmt werden kann. (2P)

4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4{,}332 \cdot 10^{-4}$.

4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f. (2P)

4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist:
„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse $f(t)$ noch vorhanden ist, hängt nur von a ab." (3P)

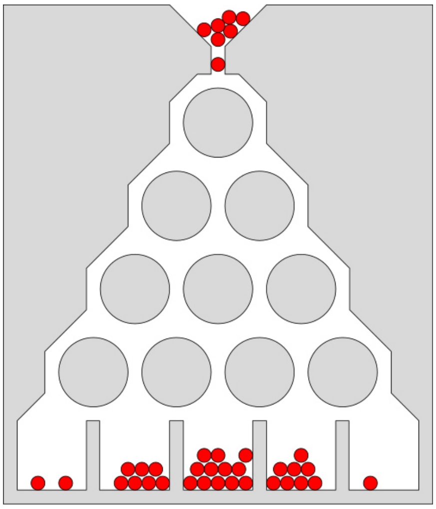
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2021

1. Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Nebenstehende Abbildung illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden.
Das dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagerecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}5$ nach jeweils einer der beiden Seiten ab.



Quelle: de.wikipedia.org

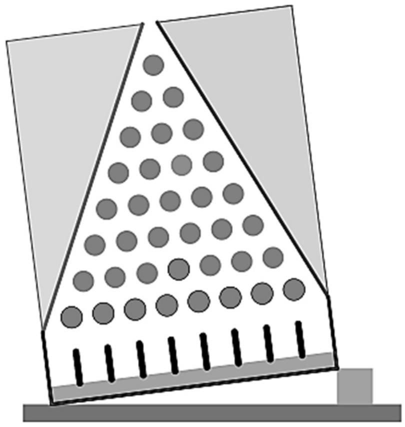
1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann.
Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an. (4P)

1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer. (4 P)

1.2 Erfahrungsgemäß fallen $5\,\%$ der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet.
Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden.“ (3P)

1.3 Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert $0{,}1$ hat. Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt. (4P)



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe A2/2021

2. Bei einer Wahl betrug die Wahlbeteiligung $76\,\%$.

2.1 Nach der Wahl werden zufällig Wahlberechtigte befragt, ob sie an der Wahl teilgenommen haben.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt. (5P)

2.2 Insgesamt wurden 136 Wahlberechtigte zufällig befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler ist. (3P)

2.3 Es haben $29\,\%$ der Wähler per Briefwahl abgestimmt.
Die Partei M erlangte $26\,\%$ aller Wählerstimmen.
Lediglich $8\,\%$ der Briefwähler wählten die Partei M.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wähler der Partei M nicht per Briefwahl abgestimmt hat. (4P)

2.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie:
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit $29\,\%$, bzw. $26\,\%$ gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau $30\,\%$ betragen." (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil4 – Vektorgeometrie

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie“ im Unterricht behandelt.

Aufgabe A1/2021

1. In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2-Ebene mit $x_2 \geq 0$.
Die quadratische Grundfläche $ABCD$ der Pyramide hat die Eckpunkte $A(0|4|0)$, $B(4|4|0)$, $C(4|8|0)$ und D. Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).

1.1 Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$ liegt. (2P)

1.2 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein. (3P)

1.3 Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 1500 Euro pro Quadratmeter kostet.
Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung. (2P)

1.4 Der Raum wird nach einer Seite hin durch eine fensterlose Wand begrenzt, die Teil der x_1x_3-Ebene mit $x_3 \geq 0$ ist. Die gegenüberliegende Wand besteht aus Glas. Vormittags trifft Sonnenlicht durch die Glaswand ein. Das Sonnenlicht verläuft in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$ und verursacht einen Schatten der gesamten Pyramide.
Untersuchen Sie, ob dieser Schatten auf die fensterlose Wand trifft. (4P)

1.5 Im Punkt $K(0|9|3)$ ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert.
Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt $P(5|4|2)$ aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann.

Aufgabe A2/2021

2. Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Dieser wird modelliert durch g mit

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix};\ \ 0 \le t \le 15$$

Hierbei ist t die Zeit in Minuten ($t = 0$ ist der Beginn des Landeanflugs) und die Längeneinheit ist Kilometer (km).
Die x_3-Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

2.1 Die Spitze des Flughafenturms befindet sich in $S(11|14|0{,}13)$.
Berechnen Sie, wie weit das Flugzeug eine Minute nach Beginn des Landeanflugs von der Spitze des Flughafenturms entfernt ist. (3P)

2.2 In einem Flugraum ist ständig mit anderen Flugzeugen zu rechnen. Dieser Flugraum wird zylinderförmig modelliert, wobei der Radius $0{,}8\,km$ ist und die Rotationsachse durch die Gerade h mit

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

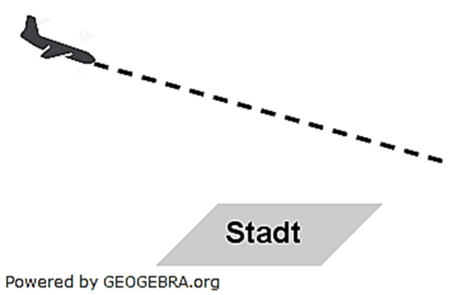
beschrieben wird. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in diesen Flugraum eintritt. (3P)

2.3 Die horizontale Landebahn befindet sich auf 100 Meter Höhe über dem Meeresspiegel. Ermitteln Sie den Landepunkt und den Winkel, unter dem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. (3P)

2.4 Vor der Landung wurde eine Stadt überflogen. Diese Stadt wird modelliert durch das Rechteck $ABCD$. Es sind $A(0|0|0{,}2)$ und $C(11|4|0{,}2)$. Das Rechteck liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0{,}2$ und seine Seiten sind parallel zur x_1-Achse bzw. x_2-Achse.

2.4.1 Geben sie die Koordinaten der Punkte B und D an. (2P)

2.4.2 Aus Sicherheitsgründen muss das Flugzeug stets mindestens $300\,m$ über der Stadt fliegen (siehe Abbildung). Prüfen Sie, ob das Flugzeug diese Mindesthöhe über der Stadt einhält. (4P)



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil4 – Matrizen und Prozesse

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

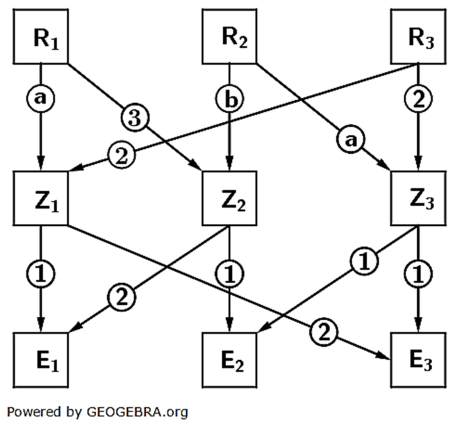
Aufgabe A1/2021 (nicht für TG)

1. Ein Betrieb produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch die nachfolgende Tabelle sowie das Verflechtungsdiagramm beschrieben.

Tabelle:

	E_1	E_2	E_3
R_1	7	5	2
R_2	6	4	1
R_3	2	6	6

Verpflechtungsdiagramm:



1.1 Interpretieren Sie den Wert 5 in der Tabelle und berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden, um jeweils $10\,ME$ der Endprodukte zu produzieren. (3P)

1.2 Ermitteln Sie die Werte von a und b im Verflechtungsdiagramm. (4P)

1.3 Um einen reibungslosen Produktionsablauf zu gewährleisten, muss im Lager ein Mindestbestand an Rohstoffen von jeweils $50\,ME$ vorhanden sein. Von R_1 sind noch $345\,ME$, von R_2 noch $285\,ME$ und von R_3 noch $330\,ME$ im Lager.
Es sollen nun $25\,ME$ von E_2 hergestellt werden.
Ermitteln Sie die hergestellten Mengen von E_1 und E_3, falls der Lagerbestand an Rohstoffen bis auf den Mindestbestand vollständig verarbeitet werden soll. (4 P)

1.4 Ein Kunde erteilt einen Auftrag über $10\,ME$ von E_1 und jeweils $20\,ME$ von E_2 und E_3. Die variablen Herstellungskosten in € pro ME der Endprodukte sind durch $\overrightarrow{k_V} = (30\ \ 15\ \ 45)$ gegeben. Die Fixkosten betragen 500 Euro.
Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise der einzelnen Endprodukte sein müssen, damit der Gewinn $10\,\%$ der Gesamtkosten beträgt und die Preise im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen. (4P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A2/2021 (nicht für TG)

2. Drei verschiedene Fitnessketten A, B und C konkurrieren in einer Region um die insgesamt 10.000 Kunden. Die Kunden sind entweder ohne Vertrag oder sie sind Mitglied bei genau einer Fitnesskette für ein Jahr angemeldet. Jedes Jahr melden sich einige Kunden ohne Vertrag neu an, manche Mitglieder wechseln die Fitnesskette, manche bleiben bei ihrer Fitnesskette, einige scheiden aus und sind dann ohne Vertrag. Die Entwicklung von einem Jahr zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ O \end{pmatrix}$$

beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Mitglieder der Fitnessketten ebenfalls mit A, B und C bezeichnet. O ist die Anzahl der Kunden ohne Vertrag.

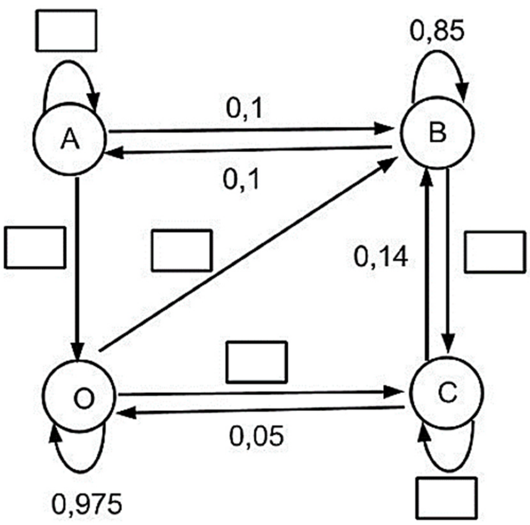
2.1 Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen der unten stehenden Grafik. (3P)

2.2 Interpretieren Sie den Eintrag $0{,}14$ im Sachzusammenhang.
Nennen Sie die Fitnesskette, zu der ausschließlich Kunden kommen, die schon zuvor bei einer Kette angemeldet waren. (2P)

2.3 Im Jahr 2020 waren jeweils 1400 Mitglieder in den drei Ketten angemeldet. Bestimmen Sie die Anzahl der Mitglieder der drei Ketten im Jahr 2021. (3P)

2.4 Langfristig werden $10\,\%$ der Kunden bei der Fitnesskette A angemeldet sein und $60\,\%$ der Kunden ohne Vertrag bleiben.
Ermitteln Sie die Verteilung aller Kunden, die von einem Jahr auf das nächste unverändert bleiben. (3P)

2.5 In einem Jahr hat die Fitnesskette A die doppelte Anzahl von Mitgliedern, wie jede der beiden anderen Ketten. Außerdem hat die Fitnesskette C dann ein Jahr später 950 Mitglieder.
Ermitteln Sie die prozentuale Zunahme der Kunden ohne Vertrag. (4P)



Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *2021*

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2021

1.1 *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:*

Schnittpunkt S_y mit $f(0)$:

$f(0) = -e^{2\cdot 0x} + 4e^0 = -1 + 4 = 3$ ➔ $S_Y(0|3)$

Nullstellen mir $f(x) = 0$

$-e^{2x} + 4e^x = 0$ | $\cdot e^{-2x}$

$-1 + 4e^{-x} = 0$

$4e^{-x} = 1$

$e^{-x} = \frac{1}{4}$ | ln

$-x = ln\left(\frac{1}{4}\right) = ln\,(4)$ | $:3$

$x = -\frac{1}{3} ln\,(4)$ ➔ $N(ln(4)\,|0)$ ➔ $N(ln\,(4)|0)$

1.2 *Bestimmung von $f'(x)$:*

$f(x) = -e^{2x} + 4e^x$

$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x$ | $2e^x$ ausklammern

$f'(x) = 2e^x(2 - e^x)$ **q.e.d.**

Extrempunkte mit $f'(x) = 0$:

$2e^x(2 - e^x) = 0$

$(2 - e^x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$e^x = 2$

$x = \ln(2)$

$f(ln\,(2)) = -(e^{ln(2)})^2 + 4 \cdot e^{ln(2)}$

$f(ln\,(2)) = -4 + 8 = 4$ ➔ $P(ln(2)\,|4)$

Art des Extremums mit $f''(x)$:

$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x$

$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^x$ | $4e^x$ ausklammern

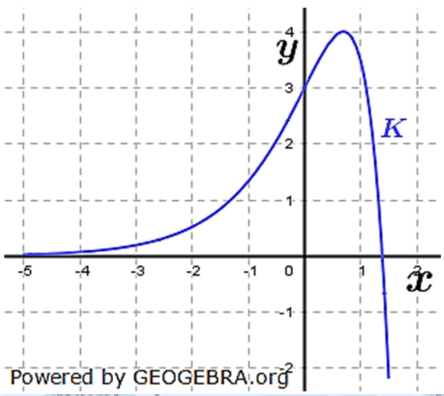
$f''(x) = 4e^x(1 - e^x)$

$f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{\ln(2)}(1 - e^{\ln(2)}) = 8(1 - 2 =< 0$

Der Extrempunkt $P(ln(2)\,|4)$ ist ein Hochpunkt.

1.3 *Zeichnung des Graphen von $f(x)$:*

Die Funktionsgleichung in den WTR eingeben, Wertetabelle anzeigen lassen und Punkte in KO-System übertragen.



1.4 *Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im $1.$ Quadranten einschließt:*

$$A_1 = \int_0^{ln\,(4)} (-e^{2x} + 4e^x)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x\right]_0^{ln\,(4)}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\ln(4)^2} + 4e^{\ln(4)} - \left(-\frac{1}{2} + 4\right) = -8 + 16 - 3{,}5 = 4{,}5$$

Mittelwert von f auf $[0; ln\,(4)]$:

$$\overline{m} = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \int_0^{\ln(4)} (-e^{2x} + 4e^x)dx = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4{,}5$$

Wegen $\frac{1}{\ln(4)} \neq 2$ ist der Mittelwert nicht das Doppelte von A_1.

1.5.1 *Mögliche Werte für c:*

Aus der Graphik von Aufgabenteil 1.3 ergibt sich, dass c für $x < 0$ nur Werte $0 < f(x) < 3$ annehmen kann.
Somit kann c für $x >$ auich nur Werte $0 < f(x) < 3$ annehmen.

1.5.2 *Strecke $\overline{PQ}$ für $c = 1$:*

Wir benötigen die Schnittpunkte von f mit $y = 1$:

$f(x) = 1 = -e^{2x} + 4e^x$
$e^{2x} - 4e^x = -1$
$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$
$e^{x_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{4-1}$ | p/q-Formel
$e^{x_1} = 2 + \sqrt{3}; \quad e^{x_2} = 2 - \sqrt{3}$
$x_1 = \ln\,(2 + \sqrt{3}) \approx 1{,}317$
$x_2 = \ln(2 - \sqrt{3}) \approx -1{,}317$
$P(-1{,}317|1); \quad Q(1{,}317|1)$

P und Q sind symmetrisch zur y-Achse, somit halbiert die y-Achse die Strecke $\overline{PQ}$.

1.6 $g(x) = f(x) + f(-x)$
$g(x) = -e^{2x} + 4e^x - e^{-2x} + 4e^{-x}$
Prüfung auf Achsensymmetrie mit $g(x) = g(-x)$
$g(-x) = -e^{-2x} + 4e^{-x} - e^{2x} + 4e^x = g(x)$
Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung A2/2021

2.1 *Begründung einer Funktionsgleichung für den Abstand des Gletscherendes bezogen auf das Jahr 2012:*

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der Gletscher pro Jahr um $200\,m$ zurückzieht. Damit haben wir eine Änderungsrate von $-0{,}2\frac{km}{a}$, die Steigung der Funktionsgleichung. Das Gletscherende lag 2012 noch $7\,km$ vom Fundort entfernt, was dem „Anfangsbestand" des Abschmelzens in 2012 entspricht.

2.2.1 *Bestimmung von $v(71)$:*

$v(71) = 7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot 71^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot 71 + 0{,}11 = 0{,}132$

Interpretation im Sachkontext:

In 2021 zieht sich der Gletscher etwa $132\,m$ zurück.

2.2.2 *Prüfung einer Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa* $115\,m$ *pro Jahr zwischen* 1950 *und* 2021*:*

$\overline{v} = \frac{1}{71-0}\int_0^{71} 7{,}56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4}t + 0{,}11\,dt =$

$= \frac{1}{71}\left[\frac{7{,}56\cdot10^{-6}t^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot10^{-4}t^2}{2} + 0{,}11t\right]_0^{71} = \frac{1}{71}\left(\frac{7{,}56\cdot10^{-6}\cdot71^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot10^{-4}\cdot71^2}{2} + 0{,}11\cdot 71\right)$

$= 0{,}115$

Mit Hilfe von v *ist somit belegbar, dass der Gletscher sich von* 1950 *bis* 2021 *um durchschnittlich etwa* $115\,m$ *pro Jahr talwärts bewegt hat.*

2.2.3 *Sachkontext für die Lösung einer Gleichung:*

Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

Lösung A3/2021

3.1 *Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt* $P2$ *erreicht:*

Die Zeit entspricht exakt einer halben Periode der Sinusschwingung.

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{5}\pi = T$

$\frac{p}{2} = \frac{1}{5}\pi = 0{,}63$

Nach etwa $0{,}63\,s$ *erreicht die Kugel zum ersten mal den Punkt* $P2$*.*

3.2 *Bestimmung der Beschleunigung* $a(0{,}2)$*:*

$a(t) = v'(t) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \cos(5t) = 0{,}25 \cdot \cos\,(5t)$

$a(0{,}2) = 0{,}25\cos(1) = 0{,}135$

$0{,}2\,s$ nach dem Loslassen hat die Kugel erstmals eine Beschleunigung von $0{,}135\,\frac{m}{s^2}$.

Mittlere Beschleunigung innerhalb der ersten $0{,}2$ Sekunden.

$\overline{a} = \frac{1}{0{,}2}\cdot\int_0^{0{,}2} a(t)\,dt = \frac{1}{0{,}2}\cdot\big(v(0{,}2) - v(0)\big) = \frac{0{,}42-00}{0{,}2} = 2{,}1$

Die mittlere Beschleunigung in den ersten $0{,}2$ Sekunden betrug $2{,}1\,m/s^2$.

3.3.1 *Nachweis der Funktionsgleichung für die Bogenlänge* b*:*

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg eine Stammfunktion der Geschwindigkeit.

$b(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{0{,}5}{5}\cos(5t) + C = -0{,}1\cos(5t) + C$

Nach einem Viertel der Periodendauer, also zum Zeitpunkt $\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ befindet sich die Kugel im tiefsten Punkt.

Dort gilt: $b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.

$b\left(\frac{\pi}{10}\right) = -0{,}1\,cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + C = 0$

$-0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$

Damit ist die gesuchte Funktion $b(t) = -0{,}1 \cdot cos\,(5t)$. **q.e.d.**

3.3.2 *Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens:*
Länge des Bogens zum Zeitpunkt $t = 0$:
$|b(0)| = 0{,}1$
Für die Länge eines Bogens gilt:
$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180\,°}$
$\alpha = \frac{b \cdot 180\,°}{\pi \cdot r} = \frac{0{,}1 \cdot 180\,°}{\pi \cdot 0{,}4} = 14{,}3\,°$
Der Auslenkwinkel beträgt etwa $14{,}3\,°$.

Lösung A4/2021

4.1 *Ermittlung eines Wertes von k sowie der Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn:*
$f(t) = c \cdot e^{kt}$
$f(20) = 99{,}14 = c \cdot e^{20k}$ | Punktprobe mit $P(20|99{,}14)$
$f(1600) = \frac{1}{2} \cdot f(0) = c \cdot e^{1600k}$ | Punktprobe zur Halbwertzeit
$f(0) = c \cdot e^0 = c$ | Anfangsbestand
(I) $99{,}14 = c \cdot e^{20k}$
(II) $\frac{1}{2} \cdot c = c \cdot e^{1600k}$ | $:c$
$0{,}5 = e^{1600k}$ | ln
$ln\,(0{,}5) = 1600k$ | $:1600$
$k = -\frac{ln(2)}{1600} = -0{,}000433217$
$k \rightarrow (I)$
(I) $99{,}14 = c \cdot e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}$ | $:e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}$
$c = \frac{99{,}14}{e^{20 \cdot (-0{,}000433217)}} = 100$
Die Masse der Probe zu Beobachtungsbeginn war $100\,g$.

4.2 *Erläuterung eines Sachkontextes:*
$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$ | $\cdot f(0)$
$f(0) - f(t) = 0{,}9 \cdot f(0)$
$f(t) = f(0) - 0{,}9 \cdot f(0) = 0{,}1 \cdot f(0)$
Mit der Formel lässt sich der Zeitpunkt t bestimmen, zu dem nur noch $10\,\%$ des Anfangsbestandes vorhanden sind bzw. $90\,\%$ zerfallen sind.

4.3.1 *Zeitpunkt eines stärksten Zerfalls von Radium und momentane Änderungsrate des selben:*
Stärkste Abnahme bzw. Zunahme findet in Wendepunkten statt.
$f(t) = 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f'(t) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f''(t) = (4{,}332 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
Wendepunkte mit $f''(t) = 0$
$0{,}2815 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t} = 0$
Exponentialfunktionen können nicht Null werden.

Betrachtung an den Rändern des Systems:
$f'(0) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^0 = -649{,}8 \cdot 10^{-4}$
$f'(\infty) = 0$
Die Funktion ist streng monoton fallend, deshalb liegt der Zeitpunkt des stärksten Zerfalls von Radium zu Beobachtungsbeginn mit etwa $-0{,}065\frac{g}{a}$.

4.3.2 Bestand zum Zeitpunkt t: $f(t)$
Bestand a Jahre später: $f(t+a)$
Anteil von $f(t+a)$ an $f(t)$:
$\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}(t+a)}}{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}t}} = e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}a}$
Somit hängt der Anteil nur vom Wert von a ab.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1/2021

1.1.1 Prallt eine Kugel auf einem Stift auf, gibt es nur 2 Möglichkeiten: Die Kugel wandert nach links oder nach rechts.
Da es nur 2 Möglichkeiten gibt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment.
Die Wiederholungen des Experiments sind stochastisch unabhängig (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts wandert, bleibt gleich). Daher handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

X = Anzahl der Fälle, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach rechts wandert.
Mögliche Werte von X: $0; 1; 2; 3; 4$
Hinweis: Alternativ könnte X auch als die Anzahl der Fälle definiert werden, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach links wandert.

1.1.2 A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach, wenn die Kugel entweder viermal oder dreimal nach rechts läuft.
$P(A) = P(X = 4) + P(X = 3)$
X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}5$.
$P(X = 4) + P(X = 3) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.
Der Fall tritt ein, wenn die Kugel nicht viermal nach rechts oder viermal nach links läuft.
$P(B) = 1 - P(X = 4) - P(X = 0) = 1 - 0{,}0625 - 0{,}0625 = 0{,}875$

1.2 *Prüfung einer Stichprobe:*
Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$ für defekte Galtonbretter. Gesucht wird der Stichprobenumfang.

$B_{n;0,05}(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$1 - B_{n;0,05}(X = 0) \geq 0{,}9$

$B_{n;0,05}(X = 0) < 0{,}1$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n < 0{,}1$

$0{,}95^n < 0{,}1 \quad | \quad ln$

$n \cdot ln(95) < ln\ (0{,}1) \quad | \quad ln(95)$

$n > \frac{\ln\ (0{,}1)}{\ln\ (0{,}95)} \quad \Rightarrow \quad n > 44{,}8$

Es müssen mindestens 45 *Galton-Bretter überprüft werden. Die Aussage ist somit falsch.*

1.3 *Wahrscheinlichkeit für ein schräg aufgestelltes Galtonbrett:*
Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Fälle an, an denen die Kugel nach links abprallt.
Z ist binomialverteilt mit $n = 8$ und unbekanntem p.
Die Kugel landet im mittleren Fach, wenn die Kugel viermal nach links und viermal nach rechts abprallt.
Bekannt: $B_{8;p}(Z = 4) = 0{,}1$

$\binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0{,}1$

$p^4 \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{700}$ | $\sqrt[4]{\ }$

$p \cdot (1-p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}}$

$-p^2 + p - 0{,}1944 = 0$

$p^2 - p + 0{,}1944 = 0$

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}1944}$ | p/q-Formel

$p_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}2358$

$p_1 = 0{,}736; \quad p_2 = 0{,}2642$

Da $p > 0{,}5$ sein muss (die Wahrscheinlichkeit ist aufgrund der Kipplage des Galton-Brettes größer als $0{,}5$) kommt nur $p = 0{,}736$ in Frage.

Lösung A2/2021

2.1 A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
$\Omega = \{g; g; \overline{g}; \overline{g}; \overline{g};\}$ g=gewählt; $\overline{g}$=nicht gewählt.
$P(A) = 0{,}76^2 \cdot (1-0{,}76)^3 = 0{,}008$

B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0{,}76$
$B_{4;0,76}(X \leq 3) = 0{,}6664$

C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.
Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}76$
$B_{20;0,76}(12 \leq X \leq 17) = B_{20;0,76}(X \leq 17) - B_{20;0,76}(X \leq 11) = 0{,}8595$

2.2 Anzahl Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler bei Stichprobenumfang von 136.
$\frac{3}{4} \cdot 136 = 102$
Binomialverteilung mit $n = 136$ und $p = 0{,}76$
$B_{136;0,76}(X = 102) = 0{,}076$

2.3.1 *Wahrscheinlichkeit für zufällig ausgewählten Wähler der Partei M, kein Briefwahl:*
Bedingte Wahrscheinlichkeit.
M: Wähler hat Partei M gewählt
B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt
Es ist bekannt: $P(B) = 0{,}9$ und $P(M) = 0{,}26$
$8\,\%$ der Briefwähler wählen Partei M: $P(B \cap M) = 0{,}08 \cdot 0{,}26 = 0{,}0232$
Gesucht: $P_M(\overline{B}) = \frac{P(M \cap \overline{B})}{P_M}$

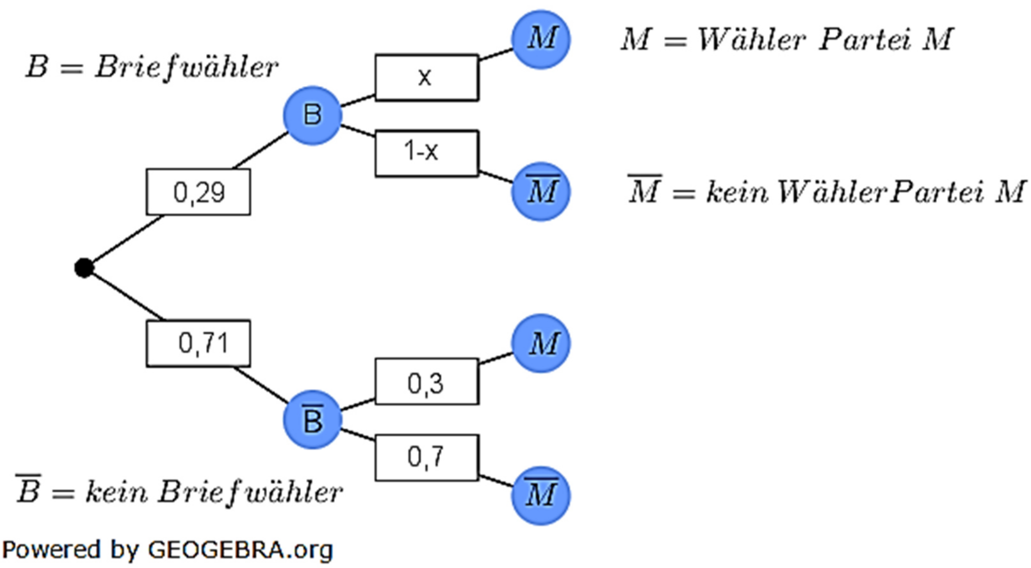
Vierfeldertafel:

	M	$\overline{M}$	$\sum$
B	0,0232	0,2668	0,29
$\overline{B}$	0,2368	0,4732	0,71
$\sum$	0,26	0,74	1,00

$P_{\overline{B}}(M) = \frac{0,2368}{0,26} = 0,9108$

2.3.2 Entscheidung ob
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit $29\,\%$, bzw. $26\,\%$ gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau $30\,\%$ betragen."
wahr oder falsch ist.

Ein Baumdiagramm für diese Prüfung hat folgendes Aussehen:



Gesucht ist der Wert von x, so dass $P(M) = 0,26$ ergibt.
$0,29 \cdot x + 0,71 \cdot 0,3 = 0,26$
$0,29 \cdot x = 0,047$
$x \approx 0,1621$
Wenn die Aussage stimmt, müsste gelten:
$P_B(M) = 0,1621$
Bei den Bedingungen in Aufgabe 2.3.1 gilt: $P_B(M) = \frac{0,0232}{0,29} = 0,08$
Da $0,1621 > 0,08$ ist, ist die Aussage wahr.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *2021*

Teil4 – Vektorgeometrie

Lösung A1/2021

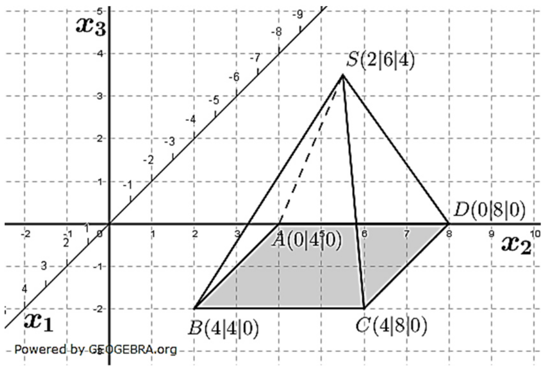
1.1 *Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$:*

Ermittlung des Schnittpunktes der Diagonalen der quadratischen Grundfläche. Dies ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Spitze liegt $4\,LE$ senkrecht über diesem Schnittpunkt. Somit hat der Punkt die Koordinaten $S(2|6|4)$.

1.2 *Pyramide im räumlichen Koordinatensystem:*



1.3 *Kosten einer Beschichtung:*

Die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke und insgesamt vier Mal vorhanden. Die Gesamtfläche errechnet sich aus:

$$A_{Mantel} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix}\right|$$

$$A_{Mantel} = 2 \cdot \sqrt{16^2 + 8^2} = 16 \cdot \sqrt{5}\, m^2$$

Kosten K:

$$K = A_{Mantel} \cdot 1500 = 16 \cdot \sqrt{5}\ m^2 \cdot 1500 \frac{€}{m^2} = 53666\, €.$$

Die Beschichtung kostet $53.666\, €$.

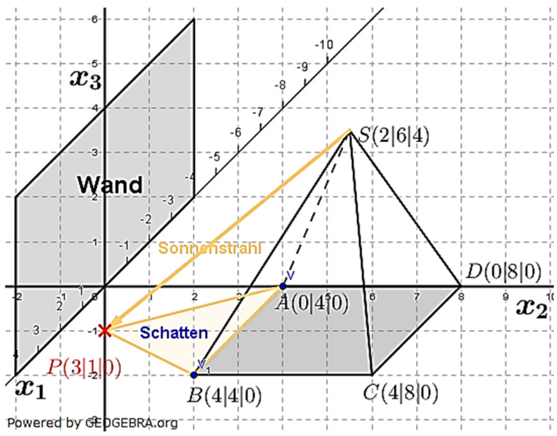
1.4 *Untersuchung eines Schattens:*

Wir untersuchen den Schattenwurf der Pyramiden-Spitze.

Der Sonnenstrahl folgt der Geraden s mit

$$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

Beim Auftreffen des Sonnenstrahls auf dem Boden ist die x_3-Koordinate des Schattenpunktes 0.



$4-8r=0$

$r=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-10\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

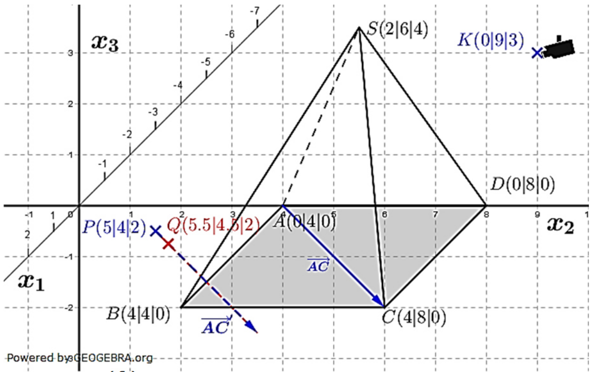
Der Auftreffpunkt des Schattens in der x_1x_2-Ebene liegt vor der x_1x_3-Ebene. Somit trifft der Pyramidenschatten nicht auf die fensterlose Wand.

1.5 *Koordinaten des Punktes Q, an dem ein Objekt von einer Kamera erstmalig erfasst werden kann:*

Gleichung der Geraden h, auf der sich der Punkt P bewegt:

$h\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix};\ \ r\in\mathbb{R}$

Der gesuchte Punkt Q entspricht dem Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E, die durch die Punkte K, S und C verläuft.



$k\cdot\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{KS}\times\overrightarrow{KC}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$E\colon\ x_1+x_2+x_3=d$

Einsetzen von $K(0|9|3)$: $d=12$

$E\colon\ x_1+x_2+x_3=12$

$E\cap h$:

$x_1=5+4r;\quad x_2=4+4r;\quad x_3=2$

$5+4r+4+4r+2=12$

$8r+11=12$

$8r=1$

$r=\frac{1}{8}$

$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5{,}5\\4{,}5\\2\end{pmatrix}$

Ab der Position $Q(5{,}5|4{,}5|2)$ kann die Kamera das Objekt erfassen.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Lösung A2/2021

2.1 *Entfernung des Flugzeugs vom Flughafenturm eine Minute nach Beginn des Landeanflug:*

Position Flugzeug eine Minute $t = 1$ nach Landanflug:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix}$$

Entfernung vom Flughafenturm $S(11|14|0{,}13)$:

$$|\overrightarrow{PS}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 0{,}13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -44 \\ -44 \\ 2{,}9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ -2{,}77 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{55^2 + 55^2 + 2{,}77^2} = 79{,}98$$

Das Flugzeug ist eine Minute nach Beginn des Landeanflugs noch $80\ km$ *von der Flughafenturmspitze entfernt.*

2.2 *Untersuchung, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in einen Flugraum eintritt:*

Wir bestimmen den kleinsten Abstand der Anfluggeraden mit der Rotationsachse des zylinderförmigen Luftraums.

Die beiden Geraden g und h sind windschief.

$d(g;h) = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als den Richtungsvektoren und $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Verbindungsvektor der Aufpunkte der beiden Geraden.

$$d(g;h) = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -40-(-48 \\ -40-(-48) \\ 3{,}6-3{,}1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0{,}2^2 + 4^2}} = \frac{1{,}6+2}{4} = 0{,}9$$

Die kleinste Entfernung der beiden Geraden beträgt $0{,}9\ km$. Da der Radius des Luftraumes nur $0{,}8\ km$ ist, tritt das Flugzeug nicht in diesen Luftraum ein.

2.3 *Landepunkt und Winkel des Flugzeuges:*

Landepunkt: Da die Landebahn $100\ m$ über dem Meeresspiegel liegt, ist zum Zeitpunkt der Landung $x_3 = 0{,}1$.

Aus der Fluggeraden folgt:

$x_3 = 0{,}1 = 3{,}1 - 0{,}2t$

$0{,}2t = 3$

$t = 15$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet im Punkt $L(12|12|0{,}1)$.

Winkel zwischen Flugbahn und Landebahn

Dies ist der Schnittwinkel zwischen einer Geraden und der Ebene, in der die Landebahn liegt. Schnittwinkel Gerade – Ebene mit dem Sinus.

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \vec{u}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4^2+4^2+0{,}2^2}} = \frac{|-0{,}2|}{5{,}66} = 0{,}03534$$

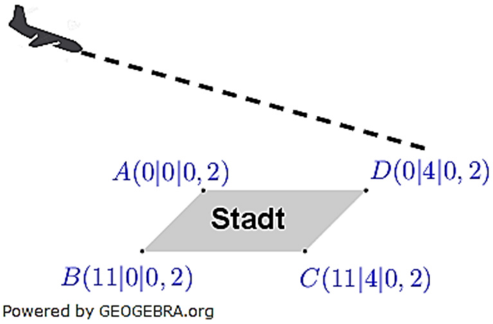
$\varphi = \arcsin(\varphi) = 2{,}03\ °$

Der Landewinkel des Flugzeuges beträgt etwa $2°$.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (*mit Hilfsmittel*) *2021*

2.4.1 Koordinaten: $B(11|0|0{,}2)$; $D(0|4|0{,}2)$

2.4.2 Nachdem wir uns über die Lage der Eckpunkte der Stadt klar geworden sind, stellen wir fest, dass die geringste Höhe des Anflugs am rechten Ende des Rechtecks ist. Wir stellen eine Ebene E parallel zur x_1x_3-Ebene durch den Punkt C (oder d) auf und schneiden diese Ebene mit der Fluggeraden.



$E\colon\ x_2 = 4$

$E \cap g$

$-48 + 4t = 4$

$4t = 52$

$t = 13$

Durchstoßpunkt des Flugzeuges mit E:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug überfliegt den rechten Rand der Stadt in $x_3 = 500\,m$ Höhe. Da die Stadt in der Höhe $200\,m$ hoch liegt, wird die Mindesthöhe zu jedem Zeitpunkt eingehalten.

Teil4 – Matrizen / Prozesse

Lösung A1/2021

1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 Mengeneinheit des Endprodukts E_2 5 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 benötigt werden.

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Gegeben ist der Endprodukt-Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Berechnung des Rohstoffvektors $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$

Es werden $140\,ME$ von R_1, $110\,ME$ von R_2 sowie $140\,ME$ von R_3 benötigt.

1.2 Aus dem Verflechtungsdiagramm ergibt sich die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$6 + a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$

Der Vergleich der Matrizen ergibt $a = 1$ und $b = 3$.

1.3 Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 345-50 \\ 285-50 \\ 330-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}$ und der

Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x+125+2y \\ 6x+100+y \\ 2x+150+6y \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 2 folgt:

$6x + 100 + y = 235$

$y = 135 - 6x$

$y \rightarrow$ Zeile 1:

$7x + 125 + 2 \cdot (135 - 6x) = 295$

$-5x + 395 = 295$

$5x = 395 - 295 = 100$
$x = 20$
$x \to y$
$y = 135 - 6 \cdot 20 = 15$
Probe:
$x; y \to$ Zeile 3:
$2 \cdot 20 + 150 + 6 \cdot 15 \overset{?}{=} 280$
$280 = 280$
Es werden $20\,ME$ von E_1 und $15\,ME$ von E_3 hergestellt.

1.4 Gegeben:

variabler Kostenvektor $\overrightarrow{k_V} = (30 \;\; 15 \;\; 45)$; Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

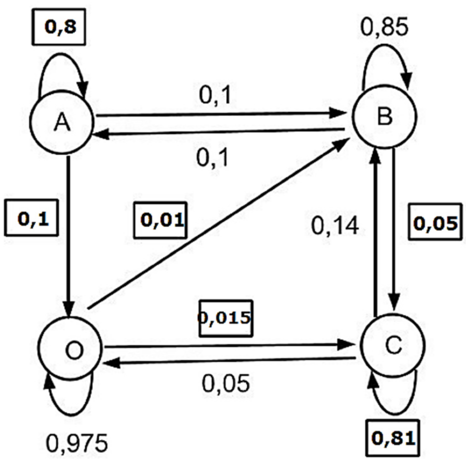
Berechnung der Gesamtkosten:
$K = \overrightarrow{k_V} \cdot \vec{p} + 500 = 300 + 300 + 900 + 500 = 2000\,€$
Der Erlös soll $2000 \cdot 1{,}1 = 2200\,€$ betragen.
Der Erlösvektor sei $\vec{u} = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3)$
Das Verhältnis der variablen Herstellkosten der Endprodukte beträgt
$30{:}\,15{:}\,45 = 2{:}\,1{:}\,3$
Damit kann der Verkaufsvektor dargestellt werden durch:
$\vec{u} = (2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2)$
Nun muss gelten: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200$

$(2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 100u_2$

$100u_2 = 2200 \;\; \Rightarrow \;\; u_2 = 22\,€$
Der Verkaufspreisvektor lautet $\vec{u} = (44 \;\; 22 \;\; 66)$
Verkaufspreis von E_1 ist $44\,€$; Verkaufspreis von E_2 ist $22\,€$; Verkaufspreis von E_3 ist $66\,€$.

Lösung A2/2021

2.1



Die Befüllung der freien Felder erfolgte anhand der Einträge in der Matrix $\boldsymbol{M}$.

2.2 Interpretation des Wertes $0{,}14$:
$14\,\%$ der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zur Fitnesskette A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren. Dies ist daran erkennbar, dass von O aus kein Pfeil zu A verläuft.

2.3 Anzahl der Mitglieder im Jahr 2021:
In den Ketten A, B, C sind im Jahr 2020 jeweils 1400 Mitglieder.
Ohne Mitgliedschaft sind $10000 - 3 \cdot 1400 = 5800$ Kunden.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ 5865 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2021 sind in A 1260 Mitglieder, in B 1584 Mitglieder und in C 1221 Mitglieder.

2.4 Gegeben ist der Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1. Zeile mal 1. Spalte:
$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot b + 0 + 0 = 0{,}1$
$0{,}08 + 0{,}1b = 0{,}1$
$0{,}1b = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}2$
Die anderen Zeilen liefern für $b = 0{,}2$ ebenfalls wahre Aussagen.
Für die 10000 Kunden lautet die stabile Verteilung:

$$\vec{v} = 10000 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 02 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

2.5 Die Ausgangsverteilung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10000 - 4x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 1000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x \\ 0{,}2x + 0{,}05x + 9750 - 3{,}9x \end{pmatrix}$$

Es soll gelten: $0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x = 950 \quad \Rightarrow \quad x = 1000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag vorher: $10000 - 4 \cdot 1000 = 6000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag nachher: $200 + 50 + 9750 - 3900 = 6100$
Die Anzahl der Kunden ohne Vertrag hat um $\frac{100}{6000} \approx 0{,}017$, also um ca. $1{,}7\,\%$ zugenommen.