

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.



Aufgabe A1/2021

- 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .
- 1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt.
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0|3)$ und $N(\ln(4)|0)$ sind. (2P)
- 1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f' von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extremums von K . (4P)
- 1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1,5$. (3P)
- 1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$. (3P)
- 1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_p|c)$ und $Q(x_q|c)$ mit $x_p < 0$ und $x_q > 0$.
- 1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. (2P)
- 1.5.2 Es gilt nun $c = 1$.
Zeigen Sie, dass dann die y -Achse die Strecke \overline{PQ} halbiert. (4P)
- 1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf \mathbb{R} definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an. (2P)

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

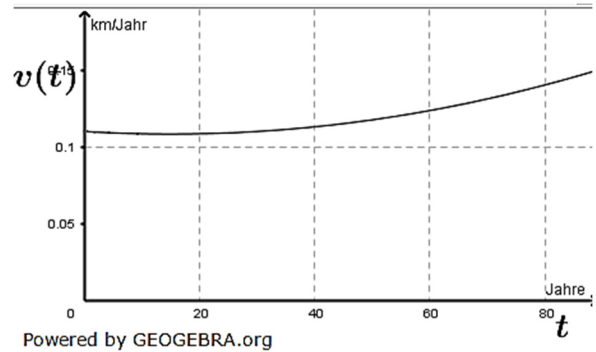
Aufgabe A2/2021

2. Bei der Untersuchung einer Gletscherspalte eines Alpengletschers wurden im Jahr 2012 im Gletschereis nur wenige Zentimeter über dem Grund des Gletschers Ausrüstungsteile gefunden, die im Jahr 1950 von Bergsteigern im Gletschereis zurückgelassen wurden.
Im Laufe der Zeit hatten sich die Ausrüstungsteile mit dem Gletscher talwärts bis zur Fundstelle bewegt. Durch eine dort in den Gesteinsboden verankerte Eisenstange wurde der Fundort der Ausrüstungsteile markiert. Der Ort, an dem der Gletscher talwärts endet, lag 2012 noch 7 Kilometer (km) vom Fundort der Ausrüstungsteile entfernt. Aufgrund der Klimaerwärmung der letzten Jahrzehnte zieht sich das Gletscherende zurück. Es bewegt sich um durchschnittlich 200 Meter (m) pro Jahr in Richtung des Fundorts.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

- 2.1 Betrachtet wird der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung. Begründen Sie, dass dieser Abstand bezogen auf das Jahr 2012 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0,2x + 7$ beschrieben werden kann. Geben Sie die Bedeutung von x im Sachkontext an. (3P)

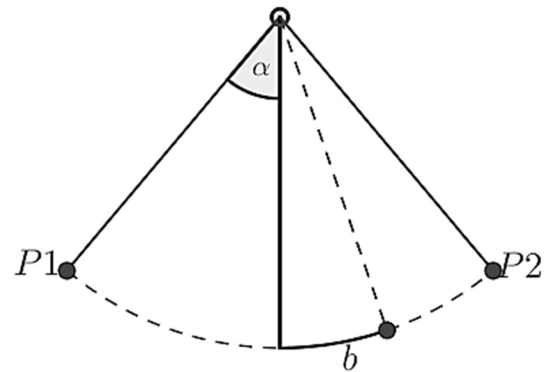
- 2.2 Die Funktion v mit $v(t) = 7,56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2,27 \cdot 10^{-4}t + 0,11$; $t > 0$ modelliert die Geschwindigkeit (in km pro Jahr) des Gletschers bei seiner Bewegung talwärts. Hier entspricht $t = 0$ dem Jahr 1950. Das Schaubild von v ist in der Abbildung dargestellt.



- 2.2.1 Bestimmen Sie $v(71)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. (2P)
- 2.2.2 Prüfen Sie, ob mit Hilfe von v belegbar ist, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talwärts bewegt hat. (3P)
- 2.2.3 Bei der Bergung der Ausrüstungsteile wurden kleine Ausrüstungsteile übersehen, sodass diese im Eis zurückblieben. Formulieren Sie eine Frage im Sachkontext, die durch Lösen der Gleichung $\int_{62}^{62+x} v(t) dt = -0,2x + 7$ mit $x > 0$ beantwortet werden kann. (3P)

Aufgabe A3/2021

3. Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position $P1$ gebracht und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Anschließend führt es eine Schwingung aus. Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit $v(t) = 0,5 \cdot \sin(5t)$ mit $t \geq 0$. Dabei wird t die Zeit in Sekunden (s) und $v(t)$ wird in Meter pro Sekunde ($\frac{m}{s}$) angegeben.



- 3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt $P2$ erreicht. (2P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

- 3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel 0,2 Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden. (3P)
- 3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0,1 \cdot \cos(5t)$; $t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei $b(t)$ die „Länge“ des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (siehe Abbildung). Negative Werte von $b(t)$ bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von P_1), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.
- 3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt. (3P)
- 3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist 0,4 m. Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung). (2P)

Aufgabe A4/2021

4. Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.
Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α -Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{kt}$; $t \geq 0$ beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und $f(t)$ die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn $t = 0$ vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).
- 4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch 99,14 g Radium vorhanden sind. (3P)
- 4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz
$$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0,9$$
 bestimmt werden kann. (2P)
- 4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4,332 \cdot 10^{-4}$.
- 4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f . (2P)
- 4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist:
„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse $f(t)$ noch vorhanden ist, hängt nur von a ab.“ (3P)

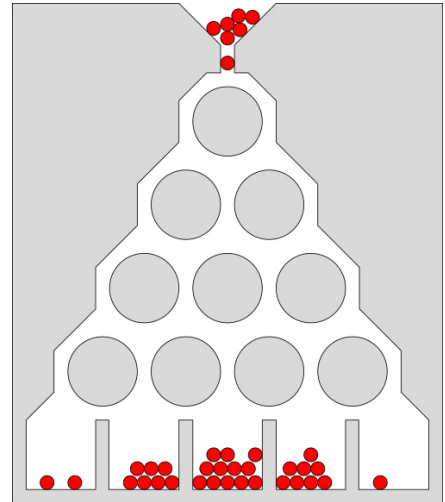
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2021

1. Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Nebenstehende Abbildung illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden. Das dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagrecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach jeweils einer der beiden Seiten ab.

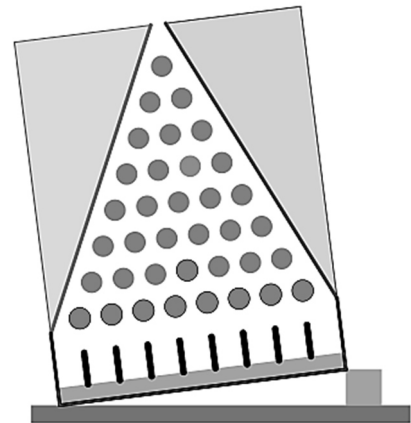


Quelle: de.wikipedia.org

- 1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.
 - 1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann. Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an. (4P)
 - 1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
 - A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
 - B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer. (4 P)
- 1.2 Erfahrungsgemäß fallen 5 % der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet. Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: „Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden.“ (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

- 1.3 Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert 0,1 hat. Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt. (4P)



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe A2/2021

2. Bei einer Wahl betrug die Wahlbeteiligung 76 %.
- 2.1 Nach der Wahl werden zufällig Wahlberechtigte befragt, ob sie an der Wahl teilgenommen haben. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt. (5P)
- 2.2 Insgesamt wurden 136 Wahlberechtigte zufällig befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler ist. (3P)
- 2.3 Es haben 29 % der Wähler per Briefwahl abgestimmt. Die Partei M erlangte 26 % aller Wählerstimmen. Lediglich 8 % der Briefwähler wählten die Partei M.
- 2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wähler der Partei M nicht per Briefwahl abgestimmt hat. (4P)
- 2.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie:
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit 29 %, bzw. 26 % gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau 30 % betragen.“ (3P)

Teil4 – Vektorgeometrie

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie“ im Unterricht behandelt.

Aufgabe A1/2021

1. In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2 -Ebene mit $x_2 \geq 0$. Die quadratische Grundfläche $ABCD$ der Pyramide hat die Eckpunkte $A(0|4|0)$, $B(4|4|0)$, $C(4|8|0)$ und D . Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).
 - 1.1 Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$ liegt. (2P)
 - 1.2 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein. (3P)
 - 1.3 Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 1500 Euro pro Quadratmeter kostet. Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung. (2P)
- 1.4 Der Raum wird nach einer Seite hin durch eine fensterlose Wand begrenzt, die Teil der x_1x_3 -Ebene mit $x_3 \geq 0$ ist. Die gegenüberliegende Wand besteht aus Glas. Vormittags trifft Sonnenlicht durch die Glaswand ein. Das Sonnenlicht verläuft in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$ und verursacht einen Schatten der gesamten Pyramide. Untersuchen Sie, ob dieser Schatten auf die fensterlose Wand trifft. (4P)
- 1.5 Im Punkt $K(0|9|3)$ ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert. Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt $P(5|4|2)$ aus in Richtung des Vektors \overrightarrow{AC} . Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q , an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A2/2021

2. Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Dieser wird modelliert durch g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3,1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0,2 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t \leq 15$$

Hierbei ist t die Zeit in Minuten ($t = 0$ ist der Beginn des Landeanflugs) und die Längeneinheit ist Kilometer (km).

Die x_3 -Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

2.1 Die Spitze des Flughafenturms befindet sich in $S(11|14|0,13)$. Berechnen Sie, wie weit das Flugzeug eine Minute nach Beginn des Landeanflugs von der Spitze des Flughafenturms entfernt ist. (3P)

2.2 In einem Flugraum ist ständig mit anderen Flugzeugen zu rechnen. Dieser Flugraum wird zylinderförmig modelliert, wobei der Radius $0,8 km$ ist und die Rotationsachse durch die Gerade h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

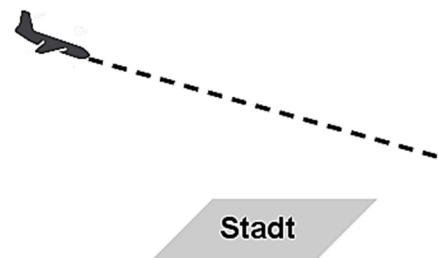
beschrieben wird. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in diesen Flugraum eintritt. (3P)

2.3 Die horizontale Landebahn befindet sich auf 100 Meter Höhe über dem Meeresspiegel. Ermitteln Sie den Landepunkt und den Winkel, unter dem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. (3P)

2.4 Vor der Landung wurde eine Stadt überflogen. Diese Stadt wird modelliert durch das Rechteck $ABCD$. Es sind $A(0|0|0,2)$ und $C(11|4|0,2)$. Das Rechteck liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0,2$ und seine Seiten sind parallel zur x_1 -Achse bzw. x_2 -Achse.

2.4.1 Geben sie die Koordinaten der Punkte B und D an. (2P)

2.4.2 Aus Sicherheitsgründen muss das Flugzeug stets mindestens $300 m$ über der Stadt fliegen (siehe Abbildung). Prüfen Sie, ob das Flugzeug diese Mindesthöhe über der Stadt einhält. (4P)



Powered by GEOGEBRA.org

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Teil4 – Matrizen und Prozesse

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse“ im Unterricht behandelt.

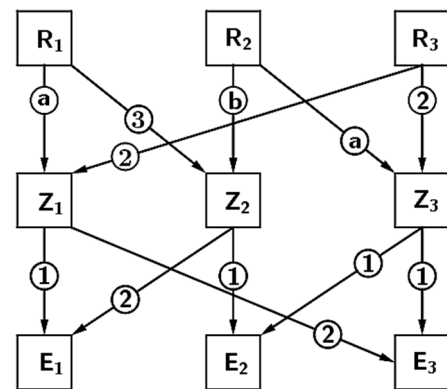
Aufgabe A1/2021 (nicht für TG)

1. Ein Betrieb produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 und Z_3 . Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch die nachfolgende Tabelle sowie das Verflechtungsdiagramm beschrieben.

Tabelle:

| | E_1 | E_2 | E_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| R_1 | 7 | 5 | 2 |
| R_2 | 6 | 4 | 1 |
| R_3 | 2 | 6 | 6 |

Verflechtungsdiagramm:



Powered by GEOGEBRA.org

- 1.1 Interpretieren Sie den Wert 5 in der Tabelle und berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden, um jeweils 10 ME der Endprodukte zu produzieren. (3P)
- 1.2 Ermitteln Sie die Werte von a und b im Verflechtungsdiagramm. (4P)
- 1.3 Um einen reibungslosen Produktionsablauf zu gewährleisten, muss im Lager ein Mindestbestand an Rohstoffen von jeweils 50 ME vorhanden sein. Von R_1 sind noch 345 ME, von R_2 noch 285 ME und von R_3 noch 330 ME im Lager. Es sollen nun 25 ME von E_2 hergestellt werden. Ermitteln Sie die hergestellten Mengen von E_1 und E_3 , falls der Lagerbestand an Rohstoffen bis auf den Mindestbestand vollständig verarbeitet werden soll. (4 P)
- 1.4 Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 10 ME von E_1 und jeweils 20 ME von E_2 und E_3 . Die variablen Herstellungskosten in € pro ME der Endprodukte sind durch $\vec{k}_V = (30 \ 15 \ 45)$ gegeben. Die Fixkosten betragen 500 Euro. Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise der einzelnen Endprodukte sein müssen, damit der Gewinn 10 % der Gesamtkosten beträgt und die Preise im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen. (4P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2021

Aufgabe A2/2021 (nicht für TG)

2. Drei verschiedene Fitnessketten A , B und C konkurrieren in einer Region um die insgesamt 10.000 Kunden. Die Kunden sind entweder ohne Vertrag oder sie sind Mitglied bei genau einer Fitnesskette für ein Jahr angemeldet. Jedes Jahr melden sich einige Kunden ohne Vertrag neu an, manche Mitglieder wechseln die Fitnesskette, manche bleiben bei ihrer Fitnesskette, einige scheiden aus und sind dann ohne Vertrag. Die Entwicklung von einem Jahr zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,85 & 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,05 & 0,81 & 0,015 \\ 0,1 & 0 & 0,05 & 0,975 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ O \end{pmatrix}$$

beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Mitglieder der Fitnessketten ebenfalls mit A , B und C bezeichnet. O ist die Anzahl der Kunden ohne Vertrag.

- 2.1 Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen der unten stehenden Grafik. (3P)
- 2.2 Interpretieren Sie den Eintrag 0,14 im Sachzusammenhang. Nennen Sie die Fitnesskette, zu der ausschließlich Kunden kommen, die schon zuvor bei einer Kette angemeldet waren. (2P)
- 2.3 Im Jahr 2020 waren jeweils 1400 Mitglieder in den drei Ketten angemeldet. Bestimmen Sie die Anzahl der Mitglieder der drei Ketten im Jahr 2021. (3P)
- 2.4 Langfristig werden 10 % der Kunden bei der Fitnesskette A angemeldet sein und 60 % der Kunden ohne Vertrag bleiben. Ermitteln Sie die Verteilung aller Kunden, die von einem Jahr auf das nächste unverändert bleiben. (3P)
- 2.5 In einem Jahr hat die Fitnesskette A die doppelte Anzahl von Mitgliedern, wie jede der beiden anderen Ketten. Außerdem hat die Fitnesskette C dann ein Jahr später 950 Mitglieder. Ermitteln Sie die prozentuale Zunahme der Kunden ohne Vertrag. (4P)

